POŠTARINA PLAĆENA U GOTOVU

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO
SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 1 — 1946. — No. 2.

IZDAJU:

MATEMATIČKO-FIZIČKA SEKCIJA I ASTRONOMSKO-GEOFIZIČKA SEKCIJA

Z A G R E B 1 9 4 6

Sadržaj — Содержание — Table des matières — Contents

Članci, dopisi, pretplate i dr. šalje se na Redakciju Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili na Upravu Društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85 i naznačiti »Za Glasnik mat.-fiz. i astr.«
Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun br. 33677. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, Dr. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Tiskara C. Albrecht (P. Acinger), Zagreb, Radićeva 26. — Za tiskaru odgovara P. Acinger, Zagreb, Radićeva 26.

Napisao Dr. Željko Marković

KAKO MATEMATIKA STVARA SVOJE TEORIJE*)

Treba li u okviru jednoga predavanja utvrditi neke bitne crte pri stvaranju matematičkih teorija, najzgodnije je da se pođe od određenoga jednog i omeđenoga područja, u kome se sve te crte već jasno razabiraju, a formalne matematičke teškoće nisu velike. Poći ćemo stoga od historijski značajnoga i spoznajno važnoga kompleksa pitanja, što se okuplja oko pojma općeg omjera u starogrčkom smislu ili realnoga broja u današnjem shvaćanju.

Na raskrsnici putova, što vode u višu analizu, stoji jedan lik, po svemu se čini vrlo star, a sudbonosan za razvoj matematičke misli: kvadrat dvostruke ploštine konstruiran nad dijagonalom zadana kvadrata. Na tom je primjeru starogrčki duh jamačno prvi puta otkrio čudnu činjenicu, da ima dužina, ovdje dijagonala i stranica kvadrata, koje se ne mogu međusobom izmjeriti, ako se služimo samo prirodnim brojevima, do tada jedinim sredstvom, do koga se ljudski rod uzdigao u sređivanju podataka izvanjega svijeta. Poznato ono mjesto u Platonovu Menonu, u kome Platon na savršen metodički način hoće da utvrdi apriorne neke preduvjete matematičke spoznaje, radi o istom problemu udvostručenja kvadrata, a Aristotelu služi nesumjerljivost dijagonale i stranice kao primjer načelne nemogućnosti nekog odnosa na brojnim mjestima njegovih spisa. Danas se općenito uzima, da je to otkriće nastalo u redovima pitagorovskih matematika u donjoj Italiji na prijelazu iz 5. i 4. stoljeće pr. Kr.; način dokazivanja nije poznat, ma da je vjerojatno, da je dokaz bio neizravan i poput onoga, što ga spominje Aristotel u svojoj Analitici, prema kome bi u slučaju sumjerljivosti dijagonale i stranice isti broj morao biti tâk i lih (v. i Euklidove Elemente, knjiga X. teorem 115.). O posljedicama tog otkrića mora da se mnogo raspravljalo među matematicima i filozofima onoga vremena, kako svjedoče mnoga mjesta u Platona. Omjeri su uopće u grčkom matema-

*) Predavanje održano u kolokviju matematičko-fizičke i astronomijske sekcije dne 28. XI. 1945.

tičkom mišljenju imali kud i kamo veću važnost nego u današnjem; mjesto da kažu, da je mjerni broj jedne veličine (dužine, vremena, težine) izmjerene drugom kao jedinicom neki racionalan broj (na pr. $^2/_3$), izriču to Grci, da se te veličine odnose kao prirodni brojevi 2 i 3, a mjesto o jednakosti razlomaka $^2/_3$ i $^4/_6$ govore o jednakosti omjera $2:3$ i $4:6$ ili o razmjeru (analogia). Uopće, ako se dvije veličine A i B odnose kao prirodni brojevi p i q, znači to za njih, da je p-struka druga veličina jednaka q-strukoj prvoj, $q \cdot A = p \cdot B$, ili da ima jedna veličina, ovdje $\frac{1}{q}$, t. zv. zajednička mjera, koja je sadržana točno q puta u B, a točno p puta u A. Ako i za druge neke dvije veličine C i D vrijedi da je $q \cdot C = p \cdot D$ s istim prirodnim brojevima p i q, definiraju se omjeri $A : B$ i $C : D$ kao jednaki. No kako je ta definicija jednakosti nemoguća u slučaju nesumjerljivosti, našla se grčka matematika pred problemom, koji se u razvoju matematike još često ponovio, da okvir jedne teorije postaje preuzak te ga treba proširiti. Grčki su matematici proširili teoriju omjera najprije tako, da su konsekventno i do kraja proveli ideju mjerenja, ali kako u slučaju nesumjerljivosti nema ni jednoga, ma kako malenoga dijela jedne veličine, koji bi bio zajednička mjera obiju, vodio ih je taj put do beskonačnoga jednog postupka, jer je omjer nesumjerljivih veličina bio predočen beskonačnim neprekinutim (verižnim) razlomkom.[1]) O visokom stanju matematičke svijesti starogrčkih matematika svjedoči činjenica, da je ta teorija napuštena i da su oni, znajući opasnosti, koje prijete matematičkom mišljenju, čim se otisne od sigurnog kopna cjelobrojnih odnosa i operacija izvedivih u konačnom broju koraka, izradili novu teoriju omjera, sumjerljivih i nesumjerljivih, služeći se kao gradivom ipak samo prirodnim brojevima, jedinom vrstom brojeva, što ih je dopuštala grčka matematika. Dogodilo se to u doba Platonovo, a izveo je to Eudokso. Osobit taj matematički genij bijaše u isto vrijeme odličan liječnik, astronom i geograf pa filozof i zakonodavac. Od njegovih se spisa nije sačuvalo ništa; no danas se uzima općenito, na temelju vijesti iz starine, da je teorija omjera u V. knjizi Euklidovih Elemenata tek prerađena teorija Eudoksova. Ta knjiga ima uopće posebno mjesto u Euklidovu sustavu i po svom značaju i po načinu, gdje se ona i kako se primjenjuje. Ona je zapravo jedno

poglavlje starogrčke više analize; svi komentatori, koji su je shvatili i do kraja promislili, ističu osobitu finoću matematičkih distinkcija, kojima je protkana. Predmet su joj omjeri općih veličina (megéthē), dok se omjeri prirodnih brojeva promatraju sasvim odjelito u VII. knjizi, u skladu s prije istaknutim položajem tih brojeva. Što je omjer, nije zapravo u Euklida definirano. Za treću se definiciju V. knjige, prema kojoj je omjer (lógos) »neko odnošenje dviju istovrsnih veličina s obzirom na količinu«, s pravom primjećuje, da je bez matematičkog značenja; zanimljiva je ipak, jer je vjerojatno ostatak dugih filozofskih raspravljanja u Platonovoj Akademiji o pojmu »logosa« te svrstava pojam omjera u kategoriju »odnošenja« (shésis) ili uopće međusobnog vladanja dvaju pojmova. Osim toga veže ona pojam omjera uz istovrsnost veličina i napokon uvodi i jedan grčki izraz za »količinu« (pēlikótēs), za koji je pokazano, da je već prilagođen novom shvaćanju i da obuhvata i sumjerljive i nesumjerljive omjere; napokon matematičkom svojom neodređenošću opravdava ona sasvim nov način definicije Eudoksove. Četvrta je definicija usmjerena već prema teoriji Eudoksovoj; »kaže se da one veličine imaju međusobom omjer, koje se umnogostručene mogu međusobom premašiti«; uvode se dakle višekratnici veličina, važni za teoriju Eudoksovu, i tvrdi, da višekratnici jedne veličine mogu premašiti drugu, dakle u biti ono, što i t. zv. Eudoksov postulat, koji u današnjoj sustavnoj izgradnji teorije realnih brojeva ima osnovno mjesto, a zove se često i Arhimedov. Peta definicija V. knjige donosi napokon Eudoksovu definiciju jednakosti omjera. Budući da nijedan višekratnik $q \cdot A$ veličine A ne može biti u slučaju nesumjerljivosti (o kome se u prvom redu radi) jednak nikome višekratniku $p \cdot B$ veličine B te je $q \cdot A < p \cdot B$ ili $q \cdot A > p \cdot B$, isporeduje Eudokso bilo koje višekratnike $q \cdot A$ veličine A i iste višekratnike $q \cdot C$ veličine C s bilo kojim drugim višekratnicima $p \cdot B$ veličine B te istim višekratnicima $p \cdot D$ veličine D. Ako je tada za svaki par prirodnih brojeva, za koji je $q \cdot A < p \cdot B$ ujedno i $q \cdot C < p \cdot D$, a za svaki par, za koji je $q \cdot A > p \cdot B$ i $q \cdot C > p \cdot D$, nesumjerljivi su omjeri $A : B$ i $C : D$ jednaki. Uključe li se u definiciju i omjeri sumjerljivi, bit će po Eudoksu općenito $A : B = C : D$, ako je za svaki par prirodnih brojeva p i q ispunjeno, da

je pored $q \cdot A \lesseqgtr p \cdot B$ uvijek i $q \cdot C \lesseqgtr p \cdot D$. Što znači ta definicija? Omjer veličina A i B ispoređuje se s omjerima prirodnih brojeva p i q te se svi prirodni brojevi vrstaju po parovima prema tome, da li im je omjer manji od omjera $A : B$, jednak ili veći; ako su tada svi omjeri prirodnih brojeva, koji su manji, jednaki ili veći od $A : B$, ujedno manji, jednaki ili veći i od $C : D$, omjeri su $A : B$ i $C : D$ jednaki. Eudoksu je dakle uspjelo da definira opće omjere samo spomoću parova prirodnih brojeva, ali i on je mogao to provesti u slučaju nesumjerljivih omjera samo uvođenjem pojma beskonačnosti, jer tih parova ima beskonačno mnogo. Pojam se beskonačnosti nije dao obaći pri samoj definiciji jednakosti ni u toj teoriji, a ni u kojoj drugoj, ali je ublažen, jer se Eudokso služi samo preglednim omjerima prirodnih brojeva, između kojih je smješten svaki nesumjerljivi omjer po posebnom zakonu u svakom slučaju. Kako se ipak dokazi mogu provesti konačnim zaključivanjem, pokazuje dokaz teorema 1. u VI. knjizi, da se trokuti jednakih visina odnose kao osnovke, ili teorema 33., da se u jednakim kružnicama središnji i obodni kutovi odnose kao lukovi. U 7. definiciji knjige V. dalje se još utvrđuje i nejednakost omjera; za jedan se omjer kaže da je veći od drugoga, ako ima bar jedan par p, q, za koji je $q \cdot A > p \cdot B$, ali $q \cdot C \leqq p \cdot B$, a u daljim se još definicijama uvode i pravila za sastavljanje novih omjera.[2]) Karakteristično je za bit tih novih, općih omjera, da se i ne definira, što je omjer, nego samo jednakost i nejednakost njihova. Ako ne ćemo da uzmemo, da je slučajnost, što nema definicije omjera u Euklida, smijemo smatrati, da s obzirom na bezizglednost matematički značajne definicije omjera Eudokso uopće i nije uveo toj pojam drukčije nego određujući, kada su omjeri jednaki ili nejednaki i kako se sastavljaju po određenim pravilima u nove omjere. Eudoksov bi opći omjer bio prema današnjem izražavanju primjer t. zv. matematičkog idealnoga predmeta, koji nije definiran eksplicite prema pravilima nominalne definicije, dakle spomoću najbliže više vrste i specifične razlike, nego implicite, t. j. upleten u odnose, koji ga vežu s drugim omjerima vezama jednakosti, nejednakosti i zakonima operacija s njima te je sve, što o njemu znamo i što treba da znamo, sadržano u tim odnosima. Eudoksov opći pojam omjera bio bi primjer definicije apstrakcijom,[3]) koja se pokazala

vrlo plodna u različitim područjima matematike, koju neki zovu i bitno stvaralačkom definicijom, no o koje filozofskoj vrijednosti nisu mišljenja jednodušna.

Koji su dakle momenti bitni pri izgradnji te teorije općih omjera? Prvi je uklanjanje izuzetaka. Svoju suptilnu misao, punu dalekosežnih posljedica, uvodi Eudokso da ispuni prazninu nastalu spoznajom o nemogućnosti omjerivanja mnogih veličina spomoću prirodnih brojeva. Kojim putem udara Eudokso? Ako kušamo rekonstruirati njegov postupak vodeći računa o stanju matematičke spoznaje onoga doba, možemo reći, da je taj postupak najneposredniji, najjednostavniji, a ipak bitno matematički. Matematičko mišljenje naime, i u početku i u daljim stanjima, često i vrlo korisno radi ispoređivanjem, analogijama. Kategorija analogija ima napose u grčkom mišljenju osobito mjesto, kako pokazuju često djela Platonova i Aristotelova. Ako među sumjerljivim dužinama može postojati odnos, koji dolazi do izražaja u obliku omjera, zašto da ne postoji i među nesumjerljivim, ako se samo to postojanje može opisati jednoznačno, neprotivurječno i strogo. Eudokso »stavlja« dakle opći pojam omjera i nesumjerljivih veličina u smislu definicije apstrakcijom i izvodi dalje posljedice. To »stavljanje«, bitni matematički posao, i u Platona je po uzoru matematike vrlo često;[4]; ono daje formalno strog osnov mnogim njegovim razlaganjima, a napose i njegovoj teoriji eidâ. Pratit će nas dalje u teorijama moderne matematike kao jedan od osnovnih motiva, kojim se polazeći od načela ne-izuzimanja uvode nova matematička bića.

Otprilike sedamdeset generacija kasnije (1858.) našao se R. Dedekind pred srodnim problemom, kad je pripremajući se za predavanja iz infinitezimalnoga računa razmišljao o biti neprekinutosti pravca. Uzimajući kao poznat pojam točke na pravcu i međusobnog položaja točaka polazi Dedekind od jednostavne činjenice, da se s obzirom na zadanu točku T sve točke pravca vrstaju u dva razreda, I i II, od kojih I obuhvata sve točke, koje leže lijevo od T, a II sve one, što su desno od T; sama se točka T može smjestiti ili u I pa zaključuje taj razred ili u II pa se on njome počinje. U čemu se tada sastoji prema Dedekindu neprekinutost pravca?[5]) U obratu toga, t. j. u tvrdnji, da razvrstaju li se sve točke pravca u dva razreda I i II tako, da svaka točka u I leži lijevo od svake točke u II, ima jedna i

samo jedna točka, koja izvodi to vrstanje. Čini li se kome taj izričaj očevidan, s tim bolje, dodaje Dedekind, jer se i onako ne može dokazati; to je aksiom, kojim se utvrđuje svojstvo neprekinutosti ili kontinuiteta pravca. Nazovemo li takovo vrstanje točaka pravca u dva razreda i posebnim imenom, prerez, stoji prema Dedekindu neprekinutost pravca u tome, da svaki prerez pravca izvodi jedna njegova točka; pravac nema dakle praznina, sasvim u skladu s pojmom neprekinutosti. Služeći se tim prilikama na pravcu kao uzorom prenosi Dedekind odnose s pravca na područje brojeva. Ishodište je i njemu dobro poznato područje racionalnih brojeva, t. j. parova prirodnih brojeva zadanih u određenom redu, s kojima se računa po poznatim pravilima. Razvrstaju li se svi racionalni brojevi u dva razreda tako, da je svaki broj u I manji od svakoga broja u II, izveden je tim prerez u području racionalnih brojeva. Bezbroj je takovih prereza izvedeno racionalnim brojevima (u I neka se na pr. nalaze svi racionalni brojevi manji od $^2/_3$, u II svi racionalni brojevi veći od $^2/_3$); racionalan broj, koji izvodi prerez (ovdje $^2/_3$) ili je najveći broj u I, dok II nema tada najmanjega racionalnog broja, ili je najmanji u II, a I nema najvećeg broja, i to označuje prereze izvedene racionalnim brojevima. Ali ishodišna je točka za dalje ta, da ima prereza, u kojima ni u I nema najvećega broja, ni u II najmanjega, kao što je onaj, kod koga su u I svi racionalni brojevi s kvadratom manjim od 2, a u II svi, kojih je kvadrat veći od 2; kako nema racionalnoga broja s kvadratom jednakim 2 (što je samo aritmetički izražaj nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata), svi su racionalni brojevi svrstani time u dva razreda traženih svojstava i čine prerez, koji nije izveden nijednim racionalnim brojem. Bezbroj je takovih prereza, kojima ne odgovara racionalan broj, što jasno svjedoči o nepotpunosti skupa racionalnih brojeva. Tada a n a l o g i j o m prema slučaju racionalnih brojeva, u namjeri da u k l o n i i z u z e t a k, što ga tvore takovi prerezi, i Dedekind »s t a v l j a«, da su i takovi prerezi izvedeni nekim »brojevima«, koji se stoga, što ne mogu biti racionalni, zovu ne-racionalni ili iracionalni. Isti momenti kao u Eudoksa nameću i Dedekindu n a j p r i p r o s t i j e rješenje problema nepotpunosti u skupu racionalnih brojeva; on »s t v a r a« nove »brojeve«, definirane novom operacijom pre-

reza u skupu svih racionalnih brojeva, kao što je i Eudokso definirao opće omjere služeći se sumjerljivim omjerima. To bi »stvaranje« bilo sasvim neplodno i ti bi »brojevi« bili blijede sjene, što u riječima samo lebde nad neracionalnim prerezima, kada to uvođenje njihovo ne bi bilo opravdano u jednu ruku time, da se i racionalni brojevi mogu definirati na isti način; u drugu ruku, da se i za ne-racionalne prereze i brojeve njima pridijeljene mogu definirati pojmovi jednakosti i nejednakosti te osnovne operacije, za koje vrijede isti zakoni, koji i za racionalne prereze i brojeve; napokon da se i numerički možemo približiti tim novim tvorevinama po volji točno s racionalnim brojevima (na pr. u obliku konačnih decimalnih brojeva sa sve većim brojem decimala), jer znamo racionalne brojeve, koji su od njih manji, kao i one, koji su veći. Za skup racionalnih i iracionalnih brojeva ili kraće realnih brojeva vrijedi tada sličan teorem neprekinutosti kao za točke brojnoga pravca: svaki je prerez u skupu realnih brojeva jednoznačno izveden jednim realnim brojem, tako da i taj skup ima potpunost iste vrste kao skup točaka na pravcu pa se sada mogu i analitičkim putem obuhvatiti sve mogućnosti među neprekinutim geometrijskim tvorevinama, što se mogu izvesti konstruktivno. Što Dedekindovoj formulaciji neprekinutosti daje jaku oznaku prirodnosti jest činjenica, da ima mjesta u Platona i Aristotela, koja u manje točnom obliku, ali na srodan način izriču neprekinutost sustava homogenih veličina;[6]) napose se Aristotelova definicija »momenta« (t. j. izraza »sada« (nyn)) u njegovoj Fizici osniva na prerezu. Ta je misao prereza tako prirodna, da i ono malo, što se zna iz Aristotela i njegovih komentatora o kvadraturi kruga pitagorovca Brisona (5. st. pr. Kr.),[7]) dobiva smisao, ako se interpretira sa stanovišta prereza. Pa i Eudoksova definicija jednakosti omjera izražena u jeziku Dedekindovu znači, da su oni omjeri jednaki, koji su izvedeni istim prerezom u skupu sumjerljivih omjera, ili po današnjem, u skupu pozitivnih racionalnih brojeva. Više od dvadeset i tri stoljeća razvoja matematičke misli nisu promijenila u bitnosti momente, koji su vodili Eudoksa, tek su ih razgranili, produbli, sistematizirali. Napose se prenošenje zakona operacija iz staroga područja u novo vrši sustavno po načelu održanja formalnih zakona, čime je nesvijesna ekonomija mišljenja, koja je jedan od stalnih

putokaza u matematičkom stvaranju i koja se očituje već u Eudoksa, svijesno stavljena u formalno određeni okvir, prema kome se uopće uvode neke tvorevine. Duboko mora da su usađeni u ustrojstvo ljudske misli tipovi matematičkoga mišljenja, kad u tako velikim razmacima vremena (bar za nas, a koji su možda ipak vrlo mali) pred srodnim problemima matematička misao srodno reagira, kad je uopće i moguće da razumijemo ne samo matematiku Eudoksovu nego i mnogo stariju matematiku egipatsku i babilonsku i kad geometriju izgrađenu na Euklidovim postulatima prihvaćamo i izgrađujemo, a zabacujemo starogrčku fiziku i njen postulat, da je najjednostavnije i najsavršenije gibanje u svemiru jednoliko gibanje u kružnici.

No vratimo se našim teorijama. Vidjeli smo, kako matematičko stvaranje crpe svoju snagu iz tla, u kome je ukorjenjeno, kako se čvrsto hvata onoga, što već postoji, da se doskora ispoređivanjem, sastavljenjem, redanjem, pročišćavanjem, poopćivanjem digne u visine vrlo profinjene apstrakcije. Malo što jasnije govori o toj čudnoj djelatnosti ljudske misli, koja se zove matematička, nego suprotnosti, što ih nalazimo između jednostavnosti ishodišnog položaja i visokog stupnja apstrakcije i zamršenosti, do koga se dolazi u konačnom obliku. Tako se u Eudoksa govori o »kojemgod« višekratniku zadanih veličina, o »svakom« paru prirodnih brojeva, a o »svim« racionalnim brojevima u Dedekinda, sve pojmovi, što se čine sasvim jasni i koji priprostim onim uvodnim putem ulaze i u zamršenije formacije, kada se definiraju operacije s novim tvorevinama. Tek kada se taj kompleks pitanja istražio s gledišta moderne teorije skupova, vidjelo se, s kako opasnim se materijalom pri tome radilo, pa je H. Weyl,[8]) i neki drugi s njime, mogao tvrditi, da je osnov logičkog uvođenja iracionalnih brojeva zapravo jedan circulus vitiosus. No kao često u razvoju matematike priprosta smjelost misli i neka spretnost, što je imaju pravi stvaraoci, očuvale su krčioce novih staza od zalâ, što su na njih vrebala; bez obzira na prigovore Aristotelove o naravi općih omjera ostali su oni čvrst osnov Euklidovih Elemenata, a ni Dedekindova teorija nije dovela u svojim posljedicama do protivurječja. Sve do sredine 19. stoljeća radilo se uopće s omjerima nesumjerljivih veličina i iracionalnim brojevima bez većih suptilnosti i ona je priprostost izlaznog polo-

žaja dugo trajala, jer su rezultati opravdavali postupke pri računanju. Taj je **praktički momenat** česti pratilac razvoja matematičkih teorija.

Dva smo već aspekta teorije realnih brojeva uočili; evo i trećega s pomoću Méray-Cantorovih osnovnih sljedova. Beskonačni slijed racionalnih brojeva osnovni je slijed, ako se apsolutna vrijednost razlike dvaju dovoljno dalekih članova slijeda može učiniti po volji malena; takov je osnovni slijed na pr. 0, 0·3, 0·33, 0·333,...., kod koga razlika dvaju dovoljno dalekih članova slijeda počinje s po volji velikim brojem nula, ili slijed 1, 1·4, 1·41, 1·412,.... dobiven vađenjem drugoga korijena iz 2, kod koga se javlja isti pojav. Ima slučajeva, kao kod prvoga slijeda, kad postoji jedan racionalan broj, ovdje $^1/_3$, kome se članovi toga slijeda bez kraja približuju, kako idemo u slijedu sve dalje, pa je on granična vrijednost toga slijeda; ali ima i bezbroj osnovnih sljedova (kao što pokazuje drugi primjer), za koje nema racionalnih brojeva toga svojstva. Da se taj izuzetak ukloni, kaže se opet analogijom prema prvom slučaju, da i takovi sljedovi teže jednoj graničnoj vrijednosti, koja samo nije racionalna, pa se i takovim sljedovima »**pridjeljuje**« broj, i to iracionalan. Pojmovi jednakosti, nejednakosti te izvođenja operacija s brojevima shvaćenim u tom smislu izvode se na temelju pravila za računanje s osnovnim sljedovima; uvode se dalje i osnovni sljedovi realnih brojeva i napokon se za taj način uvođenja iracionalnih brojeva pokazuje svojstvo zatvorenosti, što odgovara neprekinutosti u smislu Dedekindovu, da naime svaki osnovni slijed realnih brojeva teži jednoj realnoj graničnoj vrijednosti, da se dakle osnovnim sljedovima ne može prekoračiti područje realnih brojeva, kako se nije moglo ni izvođenjem prereza.

Ima još i drugih načina za uvođenje iracionalnih brojeva, ali se može pokazati, da su svi međusobom ekvivalentni, jer vode do tvorevina formalno istih svojstava, što je sasvim i dovoljno, jer su samo ta svojstva matematički relevantna. Najtočnije se izriče odnos između različitih tih teorija pojmom **izomorfnosti**. Za dvije teorije, na pr. Dedekindovu i Méray-Cantorovu, kaže se da su izomorfne, ako postoji u jednu ruku među njihovim elementima uzajmično jednoznačna veza, tako da svakom elementu jedne teorije pripada jedan elemenat druge i obrnuto; u drugu ruku, ako odnosi, što vežu elemente

prve teorije, vežu i pripadne elemente druge, tako da napose rezultatima osnovnih operacija u prvom području odgovaraju rezultati dobiveni istim operacijama u drugom području. Ono što je bitno u matematičkim teorijama jest dakle održanje formalnih veza pri prijelazu iz jedne teorije na izomorfnu drugu, dok značenje predmeta pojedine teorije ulazi tek onda u razmatranje, kada se teorija primjenjuje u jednom od svojih izomorfnih oblika. Ta važna spoznaja izomorfnosti zaslužuje osobitu pažnju za shvaćanje matematičke misli. Premda Eudokso nešto »stavlja« nezavisno od Dedekinda, izlazi daljom izgradnjom teorija izomorfna s Dedekindovom; kao da su te tvorevine tako određeno usađene u ustrojstvo našega mišljenja, da se njima ispunja prazno mjesto u njemu, i to u biti svojoj na jedan samo način, premda vanjskim oblikom različito. Ta bivstvena jednoznačnost baca posebno svijetlo na postupke matematičke, koji su i najčistiji tip postupaka ljudske misli uopće.

Kad je neka teorija u prvotnom svom obliku izgrađena i dovedena do završetka, počinje za nju prije ili kasnije nov život time, što ulazi u širi okvir druge teorije izrađene kasnije. To stavljanje u širi okvir, koje s nove strane osvjetljuje prijašnje veze, a stvara nove, značajan je momenat u izgradnji matematičkih teorija. Za realne je brojeve takov širi okvir na primjer uvođenje njihovo u teoriju brojnih tijela i s time u vezi postepena pregradnja njihove teorije s pomoću pojma klasâ. Brojno područje, na primjer područje racionalnih brojeva, proširuje se na šire područje realnih brojeva tako, da se predmeti širega područja definiraju kao skupovi predmeta užega područja vezanih nekim odnosom ili kao klase tih predmeta; na primjer neki određeni iracionalni broj kao klasa svih onih osnovnih sljedova racionalnih brojeva, za koje je taj iracionalni broj granična vrijednost. Među klasama se tada definiraju najprije odnosi veće i manje, a zatim na temelju zakona za operacije u užem području određuju se i pravila za operacije s klasama i ustanovljuje, da su ispunjeni uvjeti koji čine da one tvore brojno tijelo, kojega je jedan dio izomorfan s racionalnim brojevima. Drugi ovakov širi okvir bio bi uvođenje teorije skupova, napose uređenih, u područje realnih brojeva, i razmatranja u vezi s karakteristikama linearnoga kontinuuma.

Ima još jedan važan momenat pri stvaranju teorija, a to je v e z a s i z v a n j i m s v i j e t o m. Bila izrađena matema-

tička teorija kakogod visoke apstrakcije, momenti, koje smo do sada naveli, svjedoče, da je ona ipak tek ljudsko djelo, koje je vezano i uz stvarni svijet oko nas. U Dedekindovoj se teoriji polazi na primjer od neke prvotne, konkretne slike pravca, točaka na njemu i nekoga zornog pojma njegove neprekinutosti, a svršava se time, da se uvodi druga, apstraktna slika njegova, s tim istim pojmovima, samo sada jednoznačno i strogo definirana na temelju teorije realnih brojeva. Prvotni oni zorni elementi, prema isporedbi H. Poincaréa, služili su samo kao skele pri gradnji; nakon dovršene gradnje skele se ruše, a ostaje bitno: sustav apstraktnih veza među strogo definiranim elementima, koji u daljem razvoju sasvim zamjenjuje prvi. Taj je momenat stoga tako važan, jer je osnov primjenljivosti matematičkih teorija na prilike u izvanjem svijetu. Nad zornom tvorevinom podignuta apstraktna gradnja zrcali u svom sastavu sve bitne crte originala i veze među njima, tek u kristalnoj jasnoći i jednostavnosti matematičke njihove biti, ne udaljujući se pri tome nikada daleko od konkretnog ishodišta u svojim osnovnim crtama. Ako dalje posljedice, izvedene u nizu strogih matematičkih razvoja, dovedu do neočekivanih posljedica, do kojih se prvotno iskustveno proučavanje ne bi nikada dovinulo, tumačit će se to kao nedostatak iskustva i kao nemogućnost da se tim putem prozre sve bogatstvo onih finih veza, sadržanih potencijalno u osnovima apstraktne zgrade, iz čega može da nikne, a često i niče, teško mimoilaženje tih dvaju stanovišta, koje je uzrok i teškoći primjena matematičkih teorija, a i nerazumijevanju matematike.

Kada je jedna teorija prozrela do dna sve bitne svoje odnose i otkrila narav svoje strukture, prelazi ona u zadnji stadij, u aksiomatsku izgradnju.[9]) Svi izomorfni oblici jedne teorije shvaćaju se kao ostvarenje jednog istog formalnog sustava, u kome elementi, iz kojih je izgrađen, nemaju sadržajnoga značenja, nego su samo implicite uvedeni na temelju osnovnih veza, što ih vežu u obliku aksioma. Otresavši se slika, u kojima se svaka teorija javlja, i svih veza s momentima ljudskog stvaranja, obuhvata aksiomatski sustav samo ono, što je bitno u jednoj teoriji, čistu okosnicu njenu, iz koje se vidi način njene izgradnje, povezanost pretpostavaka i zaključaka, izvor i mnogostrukost njene razgranatosti. Formalno najčistiji oblik postizava takva teorija, ako je još pre-

dočena simbolikom matematičke ili simboličke logike, u kojoj definicije, izvodi i zaključivanja nisu više rezultati misaonih operacija, nego se svode na čisto formalna pravila za operiranje sa simbolima. Time je omogućeno teoretsko istraživanje važnih pitanja teorije, o kojoj se radi, na pr. pitanje neprotivurječnosti njenih aksioma, u strogom obliku i u potpunosti, koja bi se vrlo teško mogla postići, kada bi je proučavali izravno sadržajnim načinom zaključivanja. Aksiomatika spojena s formalizmom zaključivanja dovodi teoriju napokon u stanje, koje bi se moglo označiti nazivom theoria triumphans, čime je teorija u svom konačno izgrađenom obliku postigla završetak. No i taj je relativan, jer dalji razvoj istraživanja može i nju smjestiti u još širi aksiomatički sustav.

LITERATURA

[1]) O. Becker, Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Bd. 2, p. 311.

[2]) Za pitanja u vezi s teorijom Eudoksovom vidi:

H. Hasse-H. Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Pan-Verlag, Charlottenburg 1928., ali i primjedbe u

B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. Mathematische Annalen, Bd. 117 (1940.).

[3]) H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Handbuch der Philosophie. R. Oldenbourg, München u. Berlin, 1927., p. 8.

F. Enriques, Zur Geschichte der Logik. Deutsch von L. Bieberbach. B. G. Teubner. Leipzig u. Berlin, 1927., p. 121, 159.

[4]) Ž. Marković, Matematika u Platona i Aristotela. Rad Jugoslavenske akademije, matematičko-prirodoslovni razred, knj. 261 (1938.) p. 86.

[5]) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. 3. Aufl. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1905.

[6]) O. Becker, Eudoxos-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen? Quellen u. Studien, Abt. B, Bd. 2, p. 369.

Eudoxos-Studien III. Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekind'schen zur Zeit des Eudoxos. Quellen u. Studien, Abt. B, Bd. 3, p. 236.

[7]) Kao pod [6]).

[8]) H. Weyl, Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Veit & Comp., Leipzig, 1918., p. 23.

F. Gonseth, Les fondements des mathématiques. De la Géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionisme. A. Blanchard, Paris, 1926., p. 190.

O. Hölder, Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. J. Springer, Berlin, 1924., p. 194.

[9]) A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. 3. Aufl. J. Springer, Berlin, 1928., p. 334.

A. Tarski, Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik. J. Springer, Wien, 1937., p. 78. i F. Gonseth kao pod [8]) te H. Weyl kao pod [3]) p. 16.

Résumé

SUR LA FORMATION DES THÉORIES MATHÉMATIQUES.

Par

Dr. Ž. Marković

Dans une conférence tenue au Colloque mathématico-physique l'auteur s'est proposé d'expliquer quelques moments qui se présentent dans l'élaboration des théories mathématiques. En envisageant une théorie concrète, celle des nombres irrationnels, il expose d'abord les traits essentiels de la théorie des rapports généraux d'Eudoxe qui est à la base du 5ième livre d'Euclide. Deux moments importants y apparaissent déjà comme facteurs directeurs qui ne cessent pas de jouer leur rôle dans la formation des théories mathématiques ultérieures; c'est d'une part la tendence d'éviter les exceptions mises en évidence dans les théories précédentes; d'autre part le raisonnement par analogie procédant par comparaison et en liaison étroite avec le premier. En cherchant à reconstruire le procédé d'Eudoxe dans la constitution de sa théorie d'après l'état de la connaissance mathématique de son époque, on peut dire qu'Eudoxe, guidé par ces moments, suit la voie la plus immédiate et la plus simple, et pourtant mathématique par excellence, pour parer à l'exception qui se présente par l'existence des rapports incommensurables; il »pose« l'existence du rapport général par l'analogie avec la notion du rapport commensurable, l'action de »poser« une notion ou une relation étant familière à la philosophie de son temps dans les raisonnements qui tendaient à la rigueur, comme en témoignent de nombreux lieux dans les écrits de Platon. La nouvelle notion

n'est introduite que par une définition par abstraction contenue implicitement dans la 5ième et 7ième définition d'Euclide.

Soixante-dix générations après Eudoxe R. Dedekind s'est trouvé devant un problème de nature analogue en cherchant à approfondir l'essence de la continuité. En partant de la notion de coupure dans l'ensemble des nombres rationnels qui met en évidence les lacunes de cet ensemble comparé à celui des points de la droite, et en poursuivant la voie la plus immédiate, il »c r é e«, en s'inspirant des deux moments mentionnés, les »nombres« irrationnels, quitte à leur procurer le droit de cité par l'établissement des notions d'égalité et d'inégalité ainsi que des opérations élémentaires à effectuer avec les êtres nouvellement introduits. Le principe de conservation des lois formelles, dont s'est servi Dedekind et dont l'esprit plane aussi au-dessus des définitions d'Eudoxe, n'est qu'une norme formelle exprimant l'é c o n o m i e d e p e n s é e, et qui, instinctivement ou consciemment, reste un des moments veillant à la création des êtres mathématiques nouveaux. Ce qui donne à la notion de continuité de Dedekind une forte note de spontanéité, c'est le fait qu'il y a des lieux chez Platon et Aristote qui, dans une langue moins précise, expriment la continuité d'une manière analogue (voir en particulier la définition du »moment« dans la Physique d'Aristote) et le peu qu'on sait sur la quadrature du cercle de Bryson (5. siècle av. J.-C.) ne reçoit un sens qu'en l'interprétant dans le sens de la coupure; d'ailleurs la définition d'égalité de deux rapports d'Eudoxe, interprétée dans la langue de Dedekind, se réduit aussi à l'identité de la coupure produite par les deux rapports dans l'ensemble des nombres rationnels positifs.

En partant donc des entités mathématiques existantes et simples, c'est par comparaison, combinaison, classification, épuration, généralisation que la création mathématique atteint ce degré d'abstraction finale qui contraste avec la modestie de ses points de départ, et ce n'est qu'après coup et comme conséquence des travaux critiques qu'on s'aperçoit des dangers très réels qui entouraient le jeune être dans son développement par suite de l'usage des notions trop générales et insuffisamment définies. Mais une audace naïve de la pensée mathématique combinée avec une adresse propre aux vrais créateurs ont su

préserver les pionniers du danger dont ils étaient menacés. Le simplicité du point de vue de départ peut durer longuement: ainsi, jusqu'au milieu du 19ième siècle on traitait les rapports généraux et les nombres irrationnels sans trop de subtilité, les résultats obtenus garantissant la légitimité des procédés. C'est ce moment pratique qui soutient les théories jusqu'au jour où elles vont reçevoir leurs fondements rigoureux.

On rencontre ces mêmes moments dans l'élaboration d'autres formes de la même théorie, qui sont toutes équivalentes entre elles; c'est la notion d'isomorphisme qui les domine toutes et qui de ce fait prend une importance fondamentale. Comme si ces constructions tenaient dans la structure de notre pensée une place tellement définie qu'elles viennent y se placer comme dans un cadre vide, et cela d'une façon univoque quoique différant par leur présentations, et cette univocité essentielle jette une lumière particulière sur les procédés mathématiques qui sont en même temps le type le plus pure des procédés de la pensée humaine en général.

Pour une théorie achevée dans sa forme primordiale une vie nouvelle commence tôt au tard par son entrée dans le cadre élargi d'une théorie nouvellement créée dans l'entretemps. Pour les nombres réels un de ces cadres serait celui du corps des nombres dans lequel ils entrent par suite de l'introduction de la notion de classe et des opérations à éffectuer avec elles; un autre serait celui de la théorie des ensembles ordonnés et en particulier les considérations relatives au continu linéaire.

Un moment important dans la formation d'une théorie mathématique c'est celui de ses rapports avec le monde extérieur. Quelque soit le degré de subtilité d'une théorie mathématique dans sa phase finale, les moments mis en lumière témoignent qu'elle n'est qu'une oeuvre humaine, qui est liée d'une manière ou d'une autre au monde qui nous entoure. Dans la théorie de Dedekind par exemple on part d'une image intuitive de la droite et de ses propriétés et on aboutit à une autre image, celle-la abstraite, impliquant les mêmes notions et propriétés mais définies d'une manière univoque et rigoureuse à l'aide de la théorie des nombres réels. Mais la superstruc-

ture abstraite qui s'élève au-dessus de l'édifice intuitif et qui reflète les traits essentiels de l'original dans la clarté cristalline et la simplicité mathématique de leur essence, ne s'éloigne jamais loin, du moins dans ses traits fondamentaux, de son point de départ intuitif. C'est le fondement de l'applicabilité des théories mathématiques aux relations du monde extérieur. Et si les conséquences déduites de l'image abstraite par les développements systématiques et rigoreux aboutissent à des résultats inattendus, auxquels l'examen primitif et empirique ne se serait jamais élevé, on les expliquera par l'insuffisance des moyens appliqués et par leur incapacité de pénétrer toutes les richesses de ces liens très fins contenus en puissance dans l'édifice abstrait, d'où il résultera souvent une divergence sérieuse de ces deux points de vue qui est aussi à la base des difficultés dans l'application des théories mathématiques et de leur incompréhension.

La dernière phase d'une théorie, murie et parfaitement consciente de sa structure, est sa constitution en un système axiomatique, reçevant surtout sa perfection formelle par l'application du symbolisme de la logique symbolique. Mais cet état d'une théorie qu'on pourrait nommer theoria triumphans peut n'être que relatif, le système axiomatique auquel elle répond pouvant entrer lui-même avec le temps dans le cadre d'un système encore plus étendu.

Dr. Josip Goldberg:

FIZIKA I GEOFIZIKA*)

Razgraničiti fiziku i geofiziku po predmetu istraživanja niti je jednostavna stvar, niti ima mnogo smisla. Kompendiji definiraju: geofizika istražuje fizikalne promjene, koje se odnose na Zemlju ili veće njezine dijelove. Takvi su veći dijelovi svakako atmosfera, ocean, litosfera, ali i pojedine zračne mase, oblaci, ograničeni dijelovi geomagnetskog polja i sl. No može se pitati, koja je donja granica za veličinu prirodnog objekta na Zemlji, do koje ga još možemo smatrati predmetom geofizike. Najzad bismo tako mogli doći do trivijalne tvrdnje, da je sva fizika zapravo geofizika, jer se sve fizikalno istraživanje vrši pod zemaljskim uvjetima, u zemaljskim intervalima varijabla stanja. Ni praktički nije razgraničenje po objektu istraživanja dosljedno provedeno: svaki i najmanji udžbenik fizike sadržava geofizikalna poglavlja (geomagnetizam, fiziku atmosfere i dr.). Razlike u instrumentalnim metodama istraživanja još su manje podesne da karakteriziraju fiziku i geofiziku u međusobnom odnosu.

Bitno je za svaku prirodnu znanost, kakva je i u kojem odnosu prema realnosti njezina empirična podloga, i koji karakter imaju zakonitosti, što ih je ona utvrdila. I tu ima geofizika nešto specifično, što je odvaja od opće fizike. Čini mi se, da je o tom specifičnom značaju geofizike vrijedno govoriti, jer odavle proizlazi neki naročiti stav geofizike, a prema tome i pojedinih geofizičara prema stvarnosti, a zbog toga često i prema općim, spoznajno-kritičkim pitanjima fizike. Radi se dijelom o onom, što je filozof Kant označio kao »regulativne principe« znanosti. Kant nije na pr. kemiji svoga vremena dao mjesta u sistemu nauka, jer da ona nema regulativnih principa, što bi značilo, da je ona jedan skup empiričkih podataka, koji nijesu principima i zakonima teoretski sređeni. To isto hoće da kaže Einstein svojom primjedbom o meteorologiji, dijelu geofizike, kad veli, da bi ona, da postane pravom znanošću, morala postati meteoronomija, t. j. znanost meteoroloških za-

*) Predavanje održano 14. XI. 1945. u kolokviju Matematičko-fizičke sekcije Hrvatskog prirodoslovnog društva.

kona. Doista je meteorologija bila u opasnosti, da ostane teoretski nesređeni skup empiričkih podataka i pravila.

Nema sumnje, da zakoni čine u neku ruku upravo bivstvo fizike. Egzaktni oblik i univerzalnost, na koju zakoni fizike pretendiraju, dali su fizici dominantan položaj u sistemu nauka, tako da je fizikalni zakon postao prototipom zakonitosti u prirodi uopće. Kad je u zadnjim decenijima došla u pitanje priroda fizikalne zakonitosti, kad se u razvoju moderne atomistike rodila misao, da su fizikalni zakoni statističke prirode, kad je nedeterminiranost prirodnih pojava diskutirana kao fizička i logička mogućnost, smatralo se s pravom, da ta pitanja nisu samo interna stvar fizike, jer je fizikalna zakonitost stup našeg naziranja na svijet. Međutim, geofizika nije nikad imala osobito tijesne odnose s determinizmom; krajnji determinizam, na pr. Laplace-ov, nastao je u misaonoj sferi nebeske mehanike, a učvrstio se u mehanističkoj fizici. Geofizika ne doživljava na svom objektu strogu determiniranost, ona je uvijek bila pod utjecajem činjenice, da se stanje njezinog objekta ne može potpuno odrediti i da se njezine prognoze ne obistinjuju strogo kvantitativno.

Geofizika pod tim imenom vrlo je mlada znanost, koja se postepeno odvajala od fizike. Gledajući početke fizike novoga vijeka mogli bismo gotovo obratno reći: fizika se odvajala od geofizike; jer kad su na mijeni i u početku 17. stoljeća udareni temelji novovjekoj fizici, ti su temelji imali eminentno geofizikalni značaj. Otkrića i istraživanja Galilejeva o gibanjima u polju teže, Torricellijeva i Guericke-ova o tlaku zraka, Gilbertova »De magno magnete tellure«, Mersenne-ova o brzini zvuka u slobodnoj atmosferi — sve je to ili geofizika ili slijedećim korakom vodi u geofiziku.

U daljem razvitku razilaze se putevi; govoreći slikovito: fizika se povlači u laboratorij, geofizika ide na teren. Fizika traži opće zakone; ona će dakle ukloniti sve utjecaje, koji bi njezinim rezultatima dali karakter kao da su lokalno uvjetovani i vrijede samo za mjesto i čas opažanja. Naprotiv geofizika, koja istražujući Zemlju mora da motri isti elemenat na što više mjesta, baš traži ono »lokalno«, koje opća fizika izbjegava. Fizičar će svoj objekat po mogućnosti izolirati od okolice, a ako to ne može postići tehnikom eksperimentiranja, on će

lokalne utjecaje (na pr. tlak zraka, geomagnetsko polje) računski eliminirati. Baš upoznavanjem lokalnih i vremenskih razlika u elementima nastaju geofizikalni problemi. Tako se rađa geofizika otkrićem magnetske deklinacije i njezinih mjesnih razlika (Kolumbo), Pascal-Perier-ovim otkrićem opadanja atmosferskog tlaka idući u visinu, Richer-ovim otkrićem mjesnih razlika teže po hodu ura njihalica.

Ali pridolazi još jedan momenat: fizičar eksperimentira u laboratoriju s tjelesima vrlo ograničene veličine. Čim bi povećao dimenzije svojih objekata, susreo bi se s geofizikalnom stvarnošću, on bi već na vrlo jednostavnim mehaničkim eksperimentima, na pr. Atwoodovu padostroju, mogao otkriti utjecaj rotacije Zemlje. Ograničenost veličina donosi još jednu bitnu osobinu. Fizikalno stanje tijela određuje se varijablama stanja, gustoćom, tlakom, temperaturom, magnetskim momentom, električnim potencijalom i dr. Dok je tijelo maleno, stanje je određeno jednom vrijednošću za svaku varijablu stanja. Stanje objekata geofizike, koji imaju mnogo veće dimenzije, ne može se odrediti jednom vrijednošću za svaku varijablu stanja, nego to stanje dobijemo, ako na što više mjesta vršimo punktualna mjerenja tih varijabla.

Tako imamo u pregledu ove razlike između rada fizike i geofizike.

Fizika:	Geofizika:
U laboratoriju na stalnom mjestu;	U terenu na što više mjesta;
uklanja lokalne utjecaje ili apstrahira od njih;	istražuje baš lokalne osobine pojava;
univerzalnost rezultata, t. j. nezavisnost o mjestu i vremenu motrenja i o individualnosti pokusnog tijela, koje je samo reprezentant jedne klase tjelesa;	rezultati vrijede za individualno dato tijelo (hidrosfera, atmosfera Zemlje i dr.), mogu biti općeg, ali ne univerzalnog karaktera; mjesne razlike i vremenske promjene u prvom redu predmet istraživanja;
objekt umjerenih dimenzija;	objekt velikih dimenzija;
stanje objekta određeno jednom vrijednošću varijabla stanja.	stanje objekta dato skupom vrijednosti za svaku varijablu stanja.

Ova posljednja osobina empiričnog materijala, da je on dat skupovima brojeva, a ne pojedinačnim mjernim brojevima, stavlja geofiziku pred jedan specifični osnovni problem. Nazovimo kratko te skupove mjernih brojeva geofizikalnim kolektivima (premda oni često nemaju kriterije matematskih kolektiva po strogoj definiciji [11, § 1.]). Dok opća fizika ima da varijable stanja dovede zakonima u funkcionalnu vezu, geofizika bi imala da daje funkcionalne veze između kolektiva brojeva. Kako tu treba egzaktno postupati, to bi bio jedan »regulativni princip« geofizike, princip, koji bi imao udjela u procesu, kojim bi geofizikalne discipline postale »-nomije«. Daleko od toga, da bi se taj problem, kad se pojavio, odmah i uočio, historijski razvoj geofizikalnih disciplina tekao je drugačije. Bilo je dakako i praktičnih potreba, koje su dale svoj biljeg razvoju, tako da se geofizika nije autonomno razvijala.

Kad se utvrde vrijednosti jednog geofizičkog elementa, na pr. magnetske deklinacije, temperature zraka, intenziteta teže na raznim mjestima, prirodno je pomisliti, da su razlike uvjetovane terestričkim faktorima, na pr. geografskim položajem, razdiobom kopna i mora, nadmorskom visinom i dr. Što je bliže nego radi pregleda unositi vrijednosti u geografske karte? Tako se i zbilo. Prva takva geofizikalna karta bila je valjda karta magnetskih izogona, koju je 1701. dao E. Halley [7]. To je, čini se, prvi kartografski prikaz rezultata mjerenja jednog geofizičkog elementa izopletama, linijama, koje spajaju točke sa jednakom vrijednošću elementa. Mnogo kasnije pridošle su druge izoplete, tako izoterme 1817. (A. v. Humboldt), izobare 1819. (Brandes) i dr. Metoda kartografskog prikazivanja empiričnog materijala geofizike značila je nedvojbeno neki napredak, ali je, čini se, uzrokovala neku vrst zablude: cijelo pitanje prebačeno je u geografiju. Možda se na tu okolnost ima svesti, što su geofizikalni problemi ostali izvan vidokruga fizičara. Svakako je to — da tako kažem — geografiziranje geofizike značilo, da joj se dao deskriptivni značaj sastavnog dijela opisa Zemlje, a s tim je uklopilo u šablonu, koja nije dala, da se specifični geofizikalni problemi prihvate onako, kako njihov fizikalni značaj zahtijeva. Vegetirala je kao biljka u nepodesnu tlu. Veze između geografije i geofizike u stvari postoje, ali one su jedna drugoj samo pomoćne naúke. Iz deskriptivnog stadija izlazi geofizika u 19. stoljeću pod utjecajem snažnoga

razvoja fizike, eksperimentalne i teoretske, koji je potakao na dublje fizikalno prodiranje u geofizičke pojave.

No vratimo se problemu geofizikalnih kolektiva.

Jasno je, da se sa samim sirovim kolektivom ne može operirati ni predodžbeno, ni numerički, ni analitički. Potrebno je kolektiv preparirati. To je prepariranje moglo biti ili sa statističkog gledišta aritmetičkim metodama ili grafički, t. j. kao preparat možemo dobiti ili numeričku reprezentaciju kolektiva ili geometrijsku.

Ali uočimo ponajprije bitnu činjenicu, da se u geofizici između stvarnosti (sirovog kolektiva dobivenog mjerenjem) i fizikalne znanstvene obrade uklapa proces prepariranja, da dakle geofizičar, koji istražuje zakonitosti, ima pred sobom preparate, a ne samu stvarnost. Odnos je preparata i stvarnosti dakako veoma zavisan o metodi prepariranja, pa je metodom prepariranja već donekle prejudicirano fizikalnim zaključcima, koje će geofizičar stvoriti na osnovi tih preparata. Izrađivanjem tih preparata zaposlene su u znatnoj mjeri znanstvene geofizikalne ustanove, a izrađuju ih često osobe, koje sa znanstvenom obradom tih preparata nemaju veze. Svjetska organizacija geofizike je takva, da su metode prepariranja međunarodno dogovorene, pa se ti preparati i publiciraju, da budu geofizičarima istraživačima i praktičarima podloga za rad. Tako geofizičar često i prečesto nema ličnog kontakta sa stvarnošću. Ti su preparati bili i jesu za znanstveni razvoj geofizike upravo presudni. Nekritičke glave, koje vole šablonski rad, zamijenjivale bi preparate sa stvarnošću. Naprotiv se kod kritičkih glava razvija često jedan opći skeptični stav prema rezultatima teoretskih geofizikalnih istraživanja.

U područjima geofizike, gdje se radilo s numeričkom reprezentacijom kolektiva, imao je među numeričkim (statističkim) preparatima istaknutu ulogu, a ima i danas, aritmetički srednjak. Kod vremenski promjenljivih elemenata smatra se, da on može, u obliku dnevnog, mjesečnog, godišnjeg i dr. srednjaka, da predstavlja (reprezentira) kolektiv rezultata mjerenja na jednom mjestu i da je kao takav reprezentant karakterističan za to mjesto i može služiti za isporedbu geofizičkih prilika različitih mjesta. Kritika napada aritmetički srednjak već više od pola stoljeća; nije moguće, a nije ni potrebno ovdje iznositi, što se

sve može prigovoriti aritmetičkom srednjaku, a naročito njegovoj nekritičnoj upotrebi [5, 6, 9, 10, 12, 13]. Važno je za našu temu, što aritmetički srednjak nema karakter fizikalne veličine, s kojom bi se moglo egzaktno operirati i koja bi se mogla zakonski, funkcionalno povezivati s drugim veličinama. Drugačije je kod mjerenja na objektima laboratorija. Ako nizom mjerenja određujemo jednu materijalnu konstantu, na pr. koeficijent toplinske provodljivosti jedne kovine, pa onda uzmemo kao najvjerojatniju vrijednost aritmetički srednjak svih rezultata, onda to činimo s uvjerenjem, da je ta konstanta, neovisno o mjerenjima, jedno svojstvo adherentno toj kovini, koje se nije mijenjalo. Ali ako na opservatoriju Zagreb—Grič kroz 80 godina mjerimo temperaturu zraka i onda utvrdimo iz gotovo 90.000 mjerenja, da je srednja temperatura Zagreba 11,2°C, pa se pitamo, što to zapravo fizikalno znači, onda smo u neprilici. Je li to jedno adherentno svojstvo zraka nad Zagrebom? Ne, jer se temperatura u tom razdoblju kontinuirano mijenjala u intervalu —22,2° do +37,6°, a pri tom je razmjerno rijetko bila 11,2°. Znači li to praktički, da za Zagreb treba imati odjeću, koja odgovara temperaturi 11,2°? Što je to dakle zapravo, što sa temperaturom 11,2° egzistira neovisno o mjerenjima kao neka fizikalna realnost? Na to ne znamo odgovora.

Druga polovica 19. stoljeća donijela je matematsku nauku o kolektivima i njihovu mjerenju. Tu je geofizici sinula jedna nada. Mislili su neki istraživači, da će se sada naći realniji reprezentanti kolektiva. Krivulje frekvencije, koje prikazuju kao ordinatu frekvenciju vrijednosti jednog elementa u datim intervalima apscise, koja je vrijednost samog elementa, proučavane su i analitički i nađene su vrlo interesantne njihove karakteristike, koje doista karakteriziraju matematsku strukturu datog kolektiva [3]. Šta više, primjene tih karakteristika na geofizičke, naročito meteorološke kolektive, pokazuju i mjesne razlike tih karakteristika. Ali brojevi reprezentanti i karakteristike kolektiva, odabrani po krivuljama frekvencije (tjemena vrijednost, centralna vrijednost, disperzija, kosina, eksces), jednako su problematični u fizikalnom pogledu kao i aritmetički srednjak; ni oni nemaju karakter fizikalnih veličina, koje bi mogle ulaziti u zakonske, dinamičke relacije. Taj problem geofizike, numerička reprezentacija kolektiva, te aritmetičko i analitičko operiranje s kolektivima, ostao je do danas neri-

ješen, u koliko se radi o rješenjima upotrebivim za fizikalna istraživanja. Mi na pr. ne znamo, kako bismo za jednu veliku zračnu masu, koje je stanje dato kolektivom, dali analitički izraz relacije između tlaka, gustoće i temperature, relaciju, kakva je za mali volumen zraka data jednostavnom jednadžbom stanja $\frac{p}{\varsigma} = RT$. Ali ipak nema sumnje, da su kolektivi tih triju varijabla stanja međusobom fizikalno povezani.

Mnogo je bolje, što se tiče geometrijske reprezentacije. Tu je imao velik utjecaj pojam fizikalnog polja, koji se jako izgradio u 19. stoljeću, osobito pod utjecajem Faraday-Maxwellovih fizikalnih koncepcija. Sve se više u geofizici širila predodžba, da su stanja Zemlje data stanjem različitih fizikalnih polja, skalarnih i vektorskih, u prostoru Zemlje. Stare klimatološke izoterme, izobare i dr. našle su nasljednike u momentanim, fizikalno shvaćenim ekviskalarnim linijama, presjecima ekviskalarnih ploha. One nijesu više deskriptivno pomagalo, nego dobivaju svojim rasporedom, kao i rasporedom vektorskih veličina, koje se iz njih izvode, gradijentima i dr., dinamički smisao; one pokazuju, kako polja prelaze iz jednog stanja u drugo. Dakako, ni te nove linije ne možemo uvijek dobiti bez »prepariranja«; i tu se pojavljuju razne redukcije (tlaka na određenu nivo-plohu teže, temperature na t. zv. potencijalnu temperaturu). Ali to prepariranje ima sasvim određeni fizikalni smisao, tom redukcijom se baš hoće dinamička vrijednost podataka jače istaći.

Ne mogu u okviru ovog predavanja prikazati, kako se u pojedinim granama geofizike očitovalo ovo prodiranje fizikalnog duha putem teorije fizikalnih polja. Ima grana geofizike, gdje je što točnije istraživanje samoga polja ostao glavni cilj rada. Tako u gravimetriji, što je i razumljivo, jer je polje Zemljine teže vremenski gotovo posve konstantno. I u geomagnetizmu je istraživanju samoga polja obraćen velik dio rada, ali se proučavaju i vremenske promjene polja. Šta više, Birkeland-Störmerova teorija polarne svjetlosti [8] predstavlja jedan uspješni dinamički pokušaj, da se poremećenja magnetskog polja Zemlje prodiranjem elektronske struje heliokatodnih zrakâ objasne teoretski. Poseban je položaj seizmologije, gdje bi se u zadnjoj instanciji radilo o tom, da se plošna razdioba kinematičkih vek-

tora na površini Zemlje, koju daje širenje periodičkih impulza kroz Zemlju, dinamički poveže za uvjete, koje tomu širenju daju skalarna polja vrijednosti gustoće i elastičnih konstanta u unutrašnjosti Zemlje.

Najživlji je razvoj dinamike u 20. stoljeću u području fizike atmosfere. Tu su jak poticaj dale potrebe prakse, naročito plovidbe u zraku. Traže se metode za pouzdanu kratkoročnu, a po mogućnosti i dugoročnu prognozu vremena. Kako bi bila moguća egzaktna prognoza bez izgrađene dinamike atmosfere! Razvoj se dinamike atmosfere na osnovi fizikalnih polja otvara djelom V. Bjerknesa i suradnika na početku 2. decenija ovoga stoljeća [2]. Značenje, koje je ono imalo za dalji razvoj dinamike atmosfere, ne može se dovoljno visoko ocijeniti. A što daje to djelo? Ništa više, ali i ništa manje, nego jednu krajnje dotjeranu metodu, kako se sredstvima fizikalnih polja prikazuje fizikalno stanje atmosfere, t. j. ono, na što je morala fizika atmosfere čekati, da pristupi pravoj dinamici. U tom se djelu daju metode prikazivanja skalarnih polja tlaka, gustoće, temperature zraka, njihovi odnosi prema polju teže, t. j. skalarnom polju geopotencijala, t. zv. topografije izobarnih ploha, gdje izobare izlaze kao izohipse geopotencijala; u kinematici atmosfere vektorske plohe i linije u polju brzine, singularne linije i točke tih polja (točke i linije konvergencije i divergencije); daju se dalje metode grafičke algebre i analize u svrhu izvođenja operacija s poljima. Šta više, to djelo ide za tim, da u prikaz stanja atmosfere ne uđe više nijedna veličina, koja bi imala samo geometrijski značaj, a ne fizikalni. Tako je nadmorska visina, koja je tako bitna za dinamičku vrijednost varijabla stanja česti zraka, zamijenjena geopotencijalom točaka, na pr. visina vrha brda ne izrazuje se metrima, jednom dužinom, nego veličinom radnje, potrebne, da se jedinica mase podigne do te točke. Tlak zraka ne daje se više u mm Hg, t. j. veličinom, koja nema dimenziju tlaka, nego u milibarima, koji se svode na dyne po jedinici plohe. Bilo je za ove »novotarije« isprva skeptičara, koji su ih smatrali nebitnim. Ali tu se ne radi o onim malim razlikama, koje daje mjesna promjenljivost intenziteta teže na Zemlji u mjernim brojevima tih veličina, nego se radi o tom, da se u meteorologiji kao fizici atmosfere ustali svijest, da je atmosfera jedan veliki i komplicirani fizikalni sistem. Karakteristično je, da je eto jedan dugi razvitak

u ovoj grani geofizike istom dao ono, s čim laboratorijska fizika odavna raspolaže: metodu, kako se utvrđuje stanje objekta istraživanja.

Fizikalna metoda Bjerknesa, njegovih suradnika i sljedbenika (Sandström, Solberg, Bergeron, J. Bjerknes i dr.) pokazala je svoju moć i plodnost, kad je kasniji razvoj sinoptičke meteorologije dao dublje poglede u fizikalne uvjete vremenskog zbivanja. Proučavanjem temperaturnih polja ciklona i vektorskog polja cirkulacije zraka upoznalo se, da pri nastajanju vremenskih pojava igraju odlučnu ulogu zračne mase, veliki dijelovi atmosfere (dimenzije 10^2 do 10^3 km), koje zadržavajući se u stanovitim područjima (arktiku, tropima, kontinentima, oceanima) primaju stanovite termodinamičke konservativne osobine, konservativne u tom smislu, što ih pojedine česti zračne mase pri daljem gibanju nose sa sobom. Kad cirkulacija dovede u dodir mase različitih osobina, tako da graniče jedna uz drugu, nastaju t. zv. fronte, koje su uslijed termodinamičkih razlika masa izvori energije, a ta se očituje u vremenskim pojavama.

Ja bih bar na jednom primjeru ukratko prikazao, kako fizika poljâ dinamički obrađuje atmosferske, vremenske pojave, i to na primjeru kinematičke frontogeneze, koja objašnjava, kako u jednom dijelu atmosfere, gdje su termodinamički parametri kontinuirano raspoređeni, cirkulacioni sistem dovodi do diskontinuiteta fronte, kako dakle vektorsko polje brzina u skalarnom temperaturnom polju proizvodi diskonuitet.

Korijen je tom dinamičkom problemu zapravo već u istraživanjima Helmholtza, idejna linija vodi od njega preko M. Margulesa i V. Bjerknesa do T. Bergerona, od kojega potječe ta teorija kinematičke frontogeneze [1, 4].

Kad bi se dvije zračne mase, jedna hladnija, druga toplija, koje se ne dodiruju, vodile jednostavnom pravocrtnom translacijom jedna prema drugoj, onda bi se zrak između njih morao ukloniti, jer bi kompresijom dao protutlak. Ovako primicanje masa moguće je dakle samo jednim cirkulacionim sistemom, koji odvodi zrak i lateralno. Takav je sistem dala već kinematika tekućina u jednom klasičnom primjeru stacionarnog strujanja. Ako se ograničimo jednostavnosti radi na dvije dimenzije, imamo slučaj, gdje su potencijal brzine i strujna funkcija date realnim i imaginarnim dijelom funkcije kompleksnog argumenta

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) = (x + iy)^2$$

iz koje proizlazi

$$\varphi = x^2 - y^2; \ \psi = 2xy,$$

t. j. strujne linije, koje su radi stacionarnosti identične sa trajektorijama čestica, i ekvipotencijalne linije date su sa 2 sistema istostranih hiperbola, koje se okomito presijecaju.

Strujnice neka su hiperbole xy = const., kojima su x- i y-os asimptote. Onda tomu odgovara strujanje, kojemu je izvor u $y = \pm \infty$, a ponor u $x = \pm \infty$. Tekućina se približava x-osi i izmiče na obje strane te osi. Sistem se dakle steže u pravcu y-osi (os stezanja), a rasteže u pravcu x-osi (os rastezanja). Iz potencijala brzine, koji možemo napisati i pomnožen koeficijentom $\frac{a}{2}$, $\varphi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$ dobijemo komponente brzine

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = ax$$

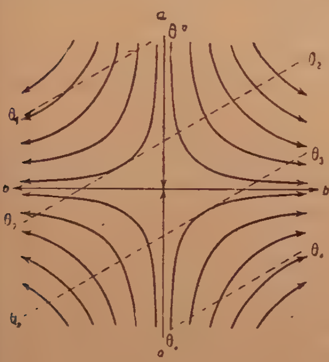
$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\,ay,$$

koje su proporcionalne koordinatama. Radi ovoga svojstva to je kinematičko polje nazvano deformacionim poljem — u asocijaciji s teorijom elasticiteta, gdje je pomacima proporcionalnim s koordinatama data jednostavna deformacija bez promjene volumena. Linearna zavisnost brzine o koordinatama čini, da čestice, koje se u jednom času nalaze na jednom pravcu, ostaju na pravcu. Ali pravci se deformacijom polja okreću, mijenjaju priklon prema x-osi, i stezanje i rastezanje u polju okreće ih u istom smislu.

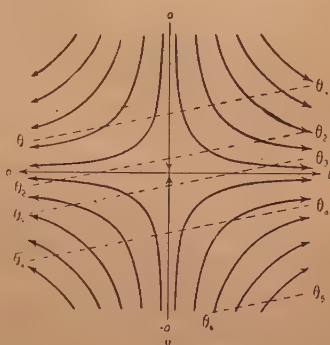
Okretanjem sistema paralelnih pravaca mijenjat će se njihov međusobni razmak i njihova udaljenost od središta (ishodišta koordinata). Može se pokazati, da se pravci, koji sa osi rastezanja čine kut $< 45^0$, okreću tako, da teže u položaj paralelan s tom osi, a pri tom se približuju i međusobom i centru. Naprotiv se pravci, koji čine sa osi rastezanja kut $> 45^0$, pri tom razmiču i od centra udaljuju.

Neka je sada takvom deformacionom polju brzinâ gibanja superponirano jedno skalarno polje temperature, i to temperaturne prilike neka su predočene izentropama, t. j. linijama jed-

nake potencijalne temperature Θ. Izentrope neka su paralelni pravci isprva ekvidistantni (sl. I) [4]. Θ neka odozdo prema gore postaje manje (gore potencijalno hladniji zrak), Θ se kontinuirano, jednoliko mijenja; između po dvije izentrope razlika neka je 1^0, priklon izentropa prema x-osi (osi rastezanja) $< 45^0$. Deformaciono polje će pravce izentropa među sobom zbližiti, t. j. gradijenti Θ postajat će sve veći, prijelaz s toplog na hladni zrak sve nagliji, pa se dakle u temperaturnom polju razvija jedan diskontinuitet. Ujedno deformaciono polje okreće izentrope u



I.



II.

položaj paralelan s osi rastezanja. Preorijentiranje izentropa na paralelizam s osi rastezanja zajedno s njihovim sve jačim zbijanjem stvara tako uzduž osi rastezanja jednu usku zonu naglog prijelaza iz toplog u hladni zrak, t. j. jednu frontu (sl. II.).

Veliko je značenje te sheme frontogeneze u tom, što se cirkulacioni sistemi poput deformacionog polja u atmosferi vrlo često ostvaruju. Ti cirkulacioni sistemi nastaju kombiniranom cirkulacijom dviju ciklona i dviju anticiklona razmještenih unakrst. Takav razmještaj ciklona (područja niskog tlaka) i anticiklona (područja visokog tlaka) je upravo redovan, jer su ta područja u prosjeku razmještena na zemaljskoj kugli poput crnih i bijelih polja na šahovskoj daski.

Ciklone imaju na sjevernoj hemisferi cirkulaciju protivnu kazaljki na uri, anticiklone u smislu kazaljke. Ako su primjerice u I. i III. kvadrantu koordinatnog sustava naše slike anticiklone, u II. i IV. ciklone, onda imamo cirkulaciju poput de-

formacionog polja, u kojem je y-os os rastezanja. Oko ishodišta koordinatnog sustava je t. zv. sedlo tlaka zraka; on raste u oba smjera pravca $y = x$, a pada u oba smjera pravca $y = -x$. Tipičan sinoptički položaj ove vrsti nastaje primjerice u Evropi, ako imamo anticiklone u NE-kvadrantu (sjeveroistočna Rusija) i u SW-kvadrantu (istočni Atlantik), a ciklone u NW-kvadrantu (Sjeverno ledeno more) i u SE-kvadrantu (Egejsko more). Tada nastaje fronta uzduž osi rastezanja sa zonom kiša, koja se proteže kroz Evropu meridionalno od Baltičkog do Jadranskog mora. Tu vidimo jedan specifično geofizikalni dinamički sistem, za koji u objektima malih dimenzija nema analogije, a bilo je moguće teoretski ga razjasniti fizikom polja.

Osvrnuo bih se još kratko na pitanje individualnosti objekta istraživanja. Fizičar, kad eksperimentirajući ima pred sobom komad materije, na pr. bakra, radi s uvjerenjem, da ga može zamijeniti drugim komadom bakra, a da se na rezultatima ništa ne mijenja. Tijelo za njega nema individualnosti. Za geofizičara njegov objekt ima individualnost (samo j e d n a je Zemlja, j e d n a atmosfera). Fizičar može reći: uzmimo jedan magnet; geofizičar ne može reći: uzmimo jedno geomagnetsko polje, kao da se to polje može po volji reproducirati. Na ovom ne-uvažavanju individualnosti dijelova materije osniva se univerzalnost fizikalnih zakona. Mogli bismo se pitati, je li ta univerzalnost zaista i potpuno zajamčena. Fizika će se vjerovatno još pozabaviti problemom individualnosti tijela; ima, šta više, već danas zasada u tom pogledu. Znamo za utjecaj mehaničke i termičke obrade na svojstva tijela; postoji histereza, gdje materija tako reći pamti svoju individualnu prošlost; ima spontanih prekristalizacija u tijelu, koje mu neopazice mijenjaju svojstva. Na pitanje individualnosti tijela može se međutim gledati i sa drugog stanovišta. H. H e r t z je u svojoj mehanici izrekao misao, da je slika svijeta, koju daje fizika, preširoka, jer ostavlja mjesta za pojave, kojih u stvari nema. Tjelesa se nalaze i gibaju u raznim poljima, magnetskim, električnim, gravitacionim, a tomu ne odgovaraju nikakve pojave. Eto, komad krede, koji je pred nama, stoji u više polja, u gravitacionom i magnetskom polju Zemlje, u električnom, tlačnom i tem-

peraturnom polju atmosfere, na nj udaraju radijacije sa svih strana, zemaljske i kosmičke zrake. Sve se to na njemu superponira. Ako to tijelo premjestimo drugamo, rezultat superpozicije polja bit će drugačiji. Je li to na drugom mjestu još zaista isto fizikalno tijelo? Fizikalna praksa prelazi preko tog pitanja, ona smatra sve te utjecaje zanemarivim, a tijelo izoliranim.

U geofizici je to drugačije. Jedan dio atmosfere primjerice smatra se stvarno izloženim svima tima utjecajima, polja nijesu bez učinka, ona su u tom tijelu aktivna. Taj dio atmosfere, prenesen na drugo mjesto, zna se drugačije vladati. Objekti su geofizike znatno veći, ali su u nekom smislu »življi«.

Možda će iz tog »unutarnjeg života« geofizikalnih objekata izaći i pobude za fiziku. Bilo je tako baš zadnjih decenija, kad su pri istraživanju ionizacije i električne vodljivosti u atmosferi otkrite kosmičke zrake.

LITERATURA:

1) T. Bergeron, Über die dreidimensional verknüpfende Wetteranalyse, Geofysiske Publikasjoner Vol. V. Nr. 6., Oslo 1928.

2) V. Bjerknes und J. W. Sandström, Dynamische Meteorologie und Hydrographie, I. Teil, Statik der Atmosphäre und Hydrosphäre, Braunschweig 1912. V. Bjerknes, Th. Hesselberg und O. Devik, Dynamische Meteorologie und Hydrographie, II. Teil, Kinematik der Atmosphäre und Hydrosphäre, Braunschweig 1913.

3) H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig 1906.

4) S. P. Chromow, Einführung in die synoptische Wetteranalyse, Deutsche Bearbeitung v. G. Swoboda, Wien 1942.

5) J. Goldberg, Über das Maass der Zuverlässigkeit klimatologischer Mittelwerte; Hrvatski geografski glasnik Br. 2. 1930.

6) J. Goldberg, O jednom elementu komparativne meteorologije, Hrv. akad. znan. i umj. Prirodoslovna istraživanja Sv. 23 (1941).

7) E. Halley, W. Whiston, J. C. Wilcke, A. v. Humboldt, C. Hausteen, Die ältesten Karten der Isogonen, Isoklinen, Isodynamen; Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie und Erdmagnetismus, hrsg. v. G. Hellmann, No 4., Berlin 1895.

8) L. Harang, Das Polarlicht; Probleme der kosmischen Physik, Bd. XX., Leipzig 1940.

9) J. Lamont, Über die Bedeutung arithmetischer Mittelwerte in der Meteorologie, Zschr. d. öst. Ges. f. Meteor. II. 1867.

10) H. Meyer, Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen für die Klimatologie; Berlin 1891.

11) R. v. Mises, Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, I. Bd. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig u. Wien 1931.

12) S. Škreb, Der Mittelwert; Hrvatski geografski glasnik, Br. 3, 1931.

13) S. Škreb, Die Häufigkeitskurven der jährlichen Niederschlagssummen, Met. Zschr. XXIX. 1912.

Physique et géophysique

Dans les lignes suivantes, on a soumis la physique et la géophysique à l'examen en se demandant quelle est la relation de leurs fondements empiriques avec la réalité et, ensuite, quel est le caractère des lois qu'elles servent à formuler.

Lorsqu'elle se met à examiner un objet, la physique en éloigne les influences locales; elle essaie d'atteindre l'universalité, c'est-à-dire des résultats qui soient indépendants du lieu et du temps de l'observation aussi bien que de l'individualité du corps examiné; ses objets n'ont pas de dimensions excessives et leur état est déterminé par u n e s e u l e valeur de chaque variable.

La géophysique, par contre, examine précisément les influences de lieu et de temps; ses résultats se rapportent à des corps individuels; ses objets ont de grandes dimensions et leur état est déterminé par un g r o u p e de valeurs pour chaque variable.

Cette importance locale de la géophysique l'a fait passer, dans son développement historique, par une période purement descriptive, géographique, qui n'a pas été fertile.

Les groupes des valeurs des variables de l'état des objets géophysiques (»collectifs géophysiques«) demandent à être soumis à une préparation pour être employés en physique; c'est pourquoi, entre la réalité et l'examinateur, la géophysique intercale la »préparation«; les préparations sont soit numériques (statistiques), soit géométriques.

Les préparations statistiques (moyenne arithmétique, caractéristique des courbes de fréquence) n'ont pas pu transformer la géophysique en une science créant des lois, puisque les produits de ces préparations ne sont pas des quantités physiques réelles.

On a employé, par contre, avec plus de succès la représentation géométrique des collectifs géophysiques, fondée sur la conception des objets géophysiques comme champs physiques.

Sur la base de cette conception s'est développée la dynamique, notamment dans le domaine de la physique de l'atmophère. Ici a fait époque la »Météorologie et hydrographie dynamique« de V. Bjerknes et ses collaborateurs, parce que cet ouvrage fournit des méthodes grâce auxquelles la physique de l'atmosphère peut fixer et représenter les objets de ses recherches.

Comme exemple de cette dynamique de l'atmophère, fondée sur la physique des champs, on a traité la frontogénèse de T. Bergeron, qui a fait connaître un système dynamique tout particulier à la géophysique, sans analogie parmi les objets de petites dimensions.

Le problème du corps individuel est considéré du point de vue de la physique et de la géophysique surtout par rapport à une pensée de H. Hertz. La physique peut négliger le fait, que le corps utilisé pour l'expérience se trouve au milieu d'un nombre considérable de champs et sous l'influence de diverses radiations, si bien que le corps, même déplacé reste le même. Par contre, pour la géophysique, du déplacement d'un objet s'ensuit un résultat différent de la superposition de ces champs et ces radiations, qui, par conséquent, entraîne après lui des phénomènes différents.

Dr. Andre Gilić

SUNČANE PJEGE U GODINI 1943.—45.

Nije naša nakana da raspravljamo ovdje o samoj prirodi Sunčanih pjega, nego tek da iznesemo rezultate naših motrenja u toku triju godina 1943—45, u pogledu broja, jačine i položaja zapaženih pjega na Suncu, i da ukažemo na to, kako su promjene i kolebanja istih, u razmotrenom razdoblju, bili u skladu sa već utvrđenom 11-godišnjom periodom Sunčane djelatnosti.

Podaci o Sunčanim pjegama u ovom izvješću dobiveni su na temelju motrenja prizmatičkim dalekozorom firme Zeiss, s objektivom od 60 mm, čiji je otvor bio sužen pomoću zastora na 30 mm, a povećanjem od 42 puta. Motrilo se je direktnim viziranjem Sunca, svakog dana, kadgod su to vremenske prilike dozvoljavale: u godini 1943 ukupno 242 dana, u godini 1944 — 235 dana, a u godini 1945 — 281 dan. Prilikom svakog motrenja bilježio se je broj skupina i pjega, te se je crtala slika Sunca sa pjegama. Na temelju tog crteža određivala se je grafičkim putem heliografska širina svih skupina pjega, uzimajući pri tome, naravski, u obzir pozicioni kut Sunčane osi te heliografsku širinu središta Sunčane plohe.

Broj svih zapaženih skupina pjega, računajući svaku skupinu samo jedanput, bez obzira na to kroz koliko dana je bila vidljiva, iznosio je u pojedinim godinama, kako slijedi:

TABELA I

Broj zapaženih skupina Sunčanih pjega

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Zbroj
1943	2	5	6	4	3	3	4	6	3	2	3	3	44
1944	1	—	3	—	—	2	2	7	4	7	3	9	38
1945	6	6	5	6	5	8	12	10	12	15	11	8	104

Skupine su unešene pod onaj mjesec, u kojem su prvi put zapažene.

Ako pogledamo zbroj u pojedinim godinama i uporedimo ga s brojem dana, kada se je motrilo, — vidi gore —, to pro-

izlazi, da se je u godini 1943 prosječno pojavljivala po 1 skupina tek svakih 5½ dana; u godini 1944 svakih 6 dana, a u godini 1945 otprilike svaki 3. dan (bilo da su te skupine izišle na istočnom rubu Sunca, bilo da su prvi put niknule na vidljivom dijelu Sunca).

Prve dvije godine su dakle općenito slabe u pogledu Sunčane djelatnosti (osobito I. polugodište 1944. godine), dok je 1945. već znatno jača.

Do istog zaključka ćemo doći, ako pogledamo broj dana, kada se nije primijetila uopće nikakva pjega na Suncu:

TABELA II

Broj dana bez pjega na Suncu[1])

(u procentima broja dana, u kojima se je motrilo)

1943	26%
1944	54%
1945	12%

Vidimo, da je Sunce u godini 1944 bilo »najčišće«, dok je u godini 1945 samo otprilike svaki osmi dan bio bez pjege.

U predašnjim godinama, a prema podacima središnjice za motrenje Sunca u Zürichu, zabilježeno je u god. 1942. 6% dana bez pjege, u godini 1941. 1,4%, a u godini 1940. pa natrag do 1936. nije bilo niti jednog dana, da bi Sunce bilo bez pjega. Tek od 1935. unatrag ponovno se je vidjelo Sunce bez pjega. Iz svega toga slijedi, da je Sunčana djelatnost prije 1935. bila slaba, onda do 1940. jača, i opet slabija od 1941. dalje. To bi, makar u najgrubljim crtama, bila slika o kolebanju Sunčane djelatnosti u zadnjem desetljeću.

Tačnije mjerilo za prosuđivanje Sunčane djelatnosti pružaju nam t. zv. »relativni brojevi« Sunčanih pjega, koje ćemo, po W o l f u, dobiti, ako kod dnevnih motrenja zabilježimo koliko je pjega f i skupina pjega g bilo vidljivo na površini Sunca, i pri tome svaku skupinu uzmemo u račun s deseterostrukom težinom, prema definiciji:

---

[1]) Vjerojatno je, da je po koja sitnija skupina izmakla našem motrenju, tako da je faktični procenat dana bez pjega možda manji, nego li je gore naznačeno.

relativni broj $r = 10\, g + f$.

Na temelju vlastitih promatranja dobili smo na taj način prosječni relativni broj pjega za pojedine mjesece u god. 1943—45 kako slijedi:

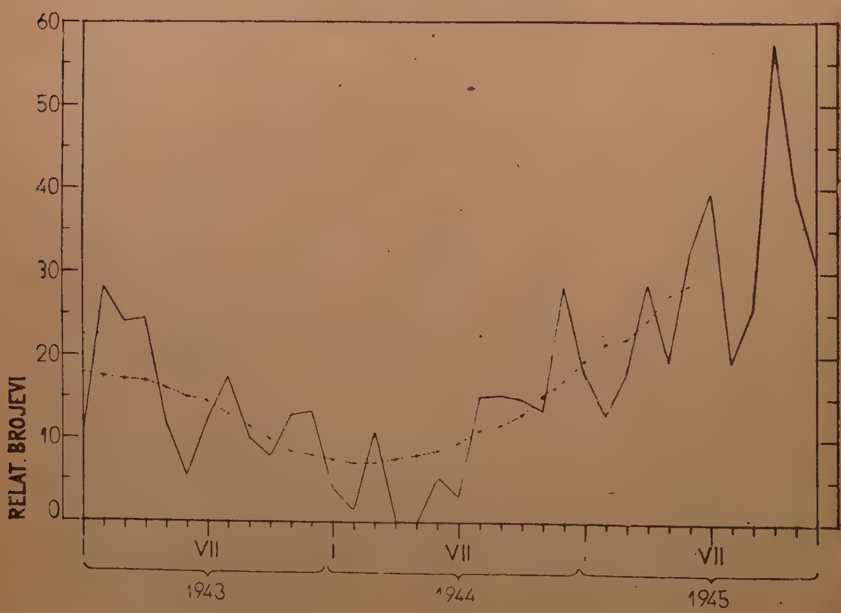
TABELA III

Prosječni relativni brojevi r

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I—XII
1943	10,8	28,4	23,8	24,4	11,8	5,4	12,1	17,4	9,9	7,7	12,9	13,2	14,8
1944	3.7	1,2	10,9	0,0	0,0	5,2	2,9	14,9	15,2	14,8	13,4	28,2	9,2
1945	17,9	13,0	17,9	28,8	19,7	32,3	39,8	19,8	26,0	57,2	39,6	30,8	28,6

Grafički prikaz gornjih brojeva, nekorigirano i u izravnatom toku (nacrtkani tok krivulje[2]) pruža nam donja slika.

RELATIVNI BROJEVI SUNČANIH PJEGA OD 1943 DO 1945



[2]) Za posljednjih 6 mjeseci 1945. godine ne donosimo izravnate vrijednosti, jer nemamo još podatke iz godine 1946, koji su potrebiti za njihovo izračunavanje.

Već površni pogled na sliku, — osobito ako gledamo na izravnati tok krivulje —, pokazuje, da se je godina 1943 približavala završetku jedne periode Sunčane djelatnosti; godina 1944 uključuje u sebi minimum, i to u I. polugodištu, dok II. polugodište iste godine pokazuje već početak nove periode, a godina 1945 imade već posve izraziti karakter uzlazne faze. Razdoblje 1943 do 1945, koje razmatramo, predstavlja dakle kao neko prelazno doba, kad jedna perioda Sunčane djelatnosti svršava, a druga počinje. Minimum pada, sudeći po numeričkim vrijednostima relativnih brojeva, u mjesecima april i maj 1944, a prema izravnatom toku **koncem februara 1944.**

Da upotpunimo gornja razmatranja, obazrijet ćemo se ovdje na vrijednosti relativnih brojeva prije 1943. godine. U tu svrhu navodimo niže, poslužujući se opet podacima središnjice iz Züricha, vrijednost r za 10 ranijih godina:[3])

TABELA IV

Srednja godišnja vrijednost relativnih brojeva (po Zürichu)

God.	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942
r	6	9	36	80	114	110	89	68	48	31

Vidimo, da je r rastao od najniže svoje vrijednosti u godini 1933 (prema izravnatom toku ustanovljen je minimum u 1933.8) do god. 1937 (po izravnatom toku bio je maksimum: 1937.4), i onda opet padao do konca 1942. Prema našim motrenjima padao je, kako smo ranije vidjeli, do minimuma u februaru 1944. godine. Interesantna je pojava, da je porast vrijednosti r bio mnogo brži od suslijednog pada: prvi je trajao oko $3^1/_2$ godina, a drugi oko $6^3/_4$. Tu je značajku ispitivao Dr. M. Waldmeyer iz Züricha u prijašnjim slučajevima, kad je uspon bio brz i jak,

[3]) Naknadno smo, — ljubeznom susretljivošću Geofizičkog Zavoda u Zagrebu — primili vrijednosti r po Zürichu i za god. 1943, te za prva 3 mjeseca 1944. godine. Kvocijent odgovarajućih vrijednosti po Zürichu i po našim motrenjima iznosi 1,16. Time bi trebali dakle pomnožiti naše vrijednosti r, da ih reduciramo na one od Züricha. Međutim se i bez toga opća slika o kolebanju relativnih brojeva od 1933 do 1945, kako smo je gore prikazali, ne mijenja bitno.

te je ustanovio, da postoji veza između te pojave i jačine maksimuma, pa je baš na temelju toga predskazao čas i jačinu maksimuma u god. 1937.[4])

Ukupni razmak vremena od minimuma u godini 1933 do slijedećeg u godini 1944 iznosi, prema izravnatim vrijednostima, okruglo $10^1/_3$ godina, dakle nešto manje od prosječne periode u kolebanju Sunčane djelatnosti, koja iznosi nekih 11.2 godina.

Ako uzmemo periodu od okruglo 11 godina, to bi, računajući od 1937. godine, imali da očekujemo slijedeći maksimum negdje u 1948. godini, i tomu se, sudeći po dosadanjim motrenjima u 1945. godini, dobrim koracima primičemo.

Prelazeći na podrobnije razmatranje pjega u godinama 1943—45, osvrnut ćemo se u prvom redu na slučajeve krupnijih pjega. U tabeli I nijesu takve posebno naznačene, zato ćemo donijeti u tabeli V. iskaz srednjih i jakih skupina, sa naznakom datuma njihovog prolaza kroz središnji meridijan Sunca. Taj je prolaz i inače od interesa, kad se hoće na pr. ispitati upliv Sunčanih pjega na Zemlju, ili kad se hoće da odrede rotacioni elementi Sunca na temelju razmaka vremena, koje je prošlo od jednog do drugog prolaza iste pjege.

Iz tabele V. se opaža, da je godina 1944 bila najmršavija, u pogledu krupnijih skupina pjega. Ali je značajno, da i godina 1945 ima razmjerno malen broj (28) krupnijih skupina, kraj ukupno 104 zapaženih skupina, dakle samo 27%. Naprotiv u godini 1943 bilo je još uvijek 22 krupnijih skupina, t. j. 50% od ukupno 44 zapaženih u istoj godini. Izgleda dakle, da se pojačanje Sunčane djelatnosti iza minimuma očituje više u obilnom broju sveukupnih skupina, koje se pojavljuju (vidi tabelu I), nego li u njihovoj jačini.

Ako pomnije razmotrimo datume u tabeli V, primijetit ćemo više slučajeva, gdje razmak vremena između pojedinih prolaza iznosi okruglo 27 do 29 dana, — što odgovara približnom trajanju sinodičke rotacije Sunca, kod srednjih heliografskih širina. U tim slučajevima se dakle radi vjerojatno o skupinama trajnije naravi, koje su doživjele jednu ili više rotacija Sunca i ponovno se pojavljivale na njegovoj vidljivoj površini. Spomenut ćemo u tabeli VI. nekoliko njih, za koje se to s približnom vjerojatnošću može utvrditi.

---

[4]) Astronomische Nachrichten, sv. 259, 267.

TABELA V
Datum prolaza krupnijih skupina pjegâ kroz centralni meridijan Sunca

1943		1944		1945	
Datum	**jakost**	**Datum**	**jakost**	**Datum**	**jakost**
(12. I.)	srednja	19. III.	srednja	12. I.	srednja
11. II.	jaka	25. III.	„	16. I.	„
25. II.	„	23. VI.	„	8. III.	„
10. III.	„	11. VIII.	„	28. III.	„
24. III.	srednja	27. VIII.	„	1. IV.	jaka
25. III.	„	(15. IX.)	„	23. IV.	srednja
1. IV.	„	23. IX.	„	26. IV.	„
6. IV.	„	(6. X.)	„	(1. V.)	„
14. IV.	„	21. X.	„	9. VI.	„
(21. IV.)	jaka	22. XI.	„	16. VI.	„
(3. V.)	srednja	(14. XII.)	„	18. VI.	„
(17. V.)	„	(20. XII.)	„	(25. VI.)	„
14. VI.	„	(27. XII.)	„	14. VII.	„
13. VII.	jaka			21. VII.	„
9. VIII.	srednja			12. VIII.	jaka
14. VIII.	„			6. IX.	srednja
19. VIII.	„			23. IX.	„
18. IX.	„			3. X.	„ (2 skup.)
3. X.	„			22. X.	„
30. X.	„			31. X.	„
26. XI.	„			1. XI.	„
19. XII.	jaka			(6. XI.)	„
				(16. XI.)	„
				(19. XI.)	„
				(2. XII.)	„
				(22. XII.)	„
				(30. XII)	„

Opaska: Datum u zagradama znači, da dotičnog dana nije bilo motrenja, ali se po pređašnjem i po slijedećem motrenju može zaključiti, da je skupina na naznačeni dan prošla kroz središnji meridijan Sunca.

TABELA VI
Pjege koje su vjerojatno doživjele više od 1 rotacije Sunca

11. II. 1943. + 6°	22. XI. 1944. + 20°	18. VI. 1945. — 22°
10. III. 1943. + 6°	(20. XII. 1944.) + 21°	14. VII. 1945. — 20°
	16. I. 1945. + 21°	
25. II. 1943. + 8°	14. XII. 1944. — 21°	3. X. 1945. — 20°
25. III. 1943. + 7°	12. I. 1945. — 22°	31. X. 1945. — 21°
3. X. 1943. + 16°		
30. X. 1943. + 15°		

Gore je označen dan prolaza kroz centr. meridijan[5]) i heliogr. širina skupine.[6])

Dvije od gornjih skupina, koje su se pojavile pri koncu 1944. godine, viđene su opet u 1945. godini.

Ako razmotrimo konačno sve skupine Sunčanih pjega prema ustanovljenoj njihovoj heliografskoj širini, to ćemo vidjeti, kako se prelazni karakter periodske Sunčane djelatnosti u godinama 1943—45 opet jasno odrazuje u tome, što je raspored pjega prije i iza nastupa minimuma posve različit.

Donosimo niže shematički prikaz, u kojem su grupirane napose skupine pjega za razdoblje prije minimuma, i to od 1. I. 1943 do 28. II. 1944, a napose one od 1. III. 1944 do 31. XII. 1945.

TABELA VII

Raspored skupina pjega po heliograf. širini

(u procentima ukupno zapaženih)

Heliografska širina	I.—XII. 1943. & I.— II. 1944.	III.—XII. 1944. & I.—XII. 1945.
iznad + 30°	0 (0%)	4% (0%)
+ 30°		
+ 25°		
+ 20°	2% (4%)	29% (19%)
+ 15°		
+ 10°	20% (23%)	1% (0%)
+ 5°		
0°	65% (64%	7% (5%)
— 5°		
— 10°		
— 15°	5% (5%)	8% (0%)
— 20°		
— 25°	4% (4%)	45% (71%
— 30°		
ispod — 30°	4% (0%)	6% (5%)

U zagradama je naznačen raspored samo krupnijih skupina pjega.

[5]) Glede datuma u zagradama vidi opasku kod tabele V.

[6]) Heliogr. širina je ustanovljena, kako je već spomenuto, na temelju crteža po direktnom viziranju Sunca, dakle samo s približnom tačnošću.

U prvom razdoblju, dakle u silaznoj fazi periodske Sunčane djelatnosti, nalazimo 65% zapaženih skupina unutar zone između + 10° i — 10°, dakle u ekvatorskom pojasu. Od preostalih pjega bilo je najviše njih (20%) grupirano u zoni između + 10° i + 15°, dakle tik uz ekvatorski pojas. U drugom razdoblju opaženo je samo 7% (od svih skupina) u ekvatorskoj zoni izmedu + 10° i — 10°, dok se je 74% ostalih skupina grupiralo u dvjema zonama između 15° i 30° bilo sjeverne, bilo južne heliogr. širine. To je posve u skladu sa Spörerovim istraživanjima i po njemu utvrđenom pravilu, po kojem se prema završetku starog ciklusa pjega ove drže bliže ekvatorskog pojasa, dok sa nastupom novog ciklusa pjega glavne zone u kojima se one skupljaju jesu dvije, i to između nekih 15° i 30° sjev. i južne širine. (Neke pjege, koje pripadaju novom ciklusu pojavljuju se doduše već i prije završetka stare periode u višim širinama, te se tada stare i nove pjege tako rekavši unakrštavaju. Tako i naša motrenja pokazuju već u maju 1943. jednu pjegu u heliogr. širini od preko — 40°. Ali to su samo pojedinačni slučajevi, te ne dolaze do osobitog izražaja u sumi svih skupina).

Pored različitog grupiranja pjega po zonama, kod prijelaza sa jednog ciklusa na drugi, pokazuju naša motrenja iz godine 1943—45 također napadnu razliku u pogledu rasporeda pjega po polutkama Sunca, prije i poslije minimuma. Već iz tabele VII proizlazi, da skupine nijesu podjednako raspodjeljene sjeverno i južno od ekvatora, nego u prvom razdoblju, prije minimuma, u koliko pjege ne leže u području oko ekvatora, one se pojavljuju u zoni odmah sjeverno ekvatorskog pojasa. Iza minimuma pak, kad su pjege raspoređene unutar dviju zona iznad odnosno ispod ekvatora, one kao da daju prednost južnoj polutci. Još se bolje to razabire iz slijedeće tabele, u kojoj je na temelju naših motrenja naznačen postotak svih zapaženih pjega (u zagradama je naznačen postotak samo krupnijih skupina) po pojedinim polutkama:

TABELA VIII

Raspodjela skupina pjega po polutkama Sunca

	Od I. 1943. do II. 1944.	Od III. 1944. do XII. 1945.
Sjeverna polutka	62% (68%)	35% (22%)
Južna „	38% (32%)	65% (78%)

Upravo je upadljiva razlika u rasporedu pjega po polutkama između razdoblja prije i poslije minimuma: tamo 62% skupina (ili 68%, ako se uzmu u obzir samo krupnije skupine) na sjevernoj polutci, ovdje 65% (odnosno 78%) na južnoj. Prema tome je istodobno s nastupom serije pjega novog ciklusa uslijedio skok pjega s jedne polutke na drugu. Pojava je dakle analogna promjeni u magnetskom polaritetu, koju opažamo, kad jedna perioda pjega izmjenjuje drugu. Bit će dakle zanimljivo pratiti daljnji razvoj raspodjele pjega po polutkama u slijedećim godinama.

Na koncu nam je ugodna dužnost, da zahvalimo Zvonimiru Janoviću, koji nam je stavio na raspolaganje svoja motrenja o Sunčanim pjegama kroz nekoliko dana u godini 1945, koja su nam manjkala, jer smo bili spriječeni, da lično motrimo. Primijetit nam je još, da Zv. Janović vrši svoja motrenja jednakim dalekozorom i po istoj metodi kao i mi.

SUMMARY

Solar Spots in the Years 1943—45.

During 1943, 1944 and 1945 the sunspots were being observed for altogether 758 days. The numbers of visible spots in the aforementioned years were 44, 38 and 104 respectively. Some of them are remarkable for being repeatedly visible after a completion or two of the Sun's rotation (table VI).

The so called »Wolf numbers« (table III and diagram) show a minimum of sunspot frequency in 1944.2, the former minimum having appeared in 1933.8, so that the period represents a cycle of 10.4 years, which is about 0.8 years less than the mean periodic value.

Before the time of minimum most of the spots (65%) were grouped in the zone between about + 10° and — 10° of latitude, whereas after that time the spots were almost absent in the band next to the solar equator and preferred to appear in the regions of higher solar latitudes viz. in two zones between about 15° and 30° on both sides of the equator, — confirming thus once more Spörer's law of migrating mean latitudes of spots.

But apart from that there is another feature in the grouping of sunspots over his surface, before and after the time of minimum. While before that time the number of spots, appearing in the Northern hemisphere of the Sun, was as much as 68% out of the total number of spots recorded in all — after the minimum there were only 35% on the Northern hemisphere.

A closer examination of the repartition of the spots over the sun's surface in every single month shows that the aforementioned migrating from one hemisphere to the other does not occur gradually but starts at the very moment when a cyclic period terminates and a new one begins. This phenomenon is analogous to what we know about the change in the magnetic polarity of spots when an old series is followed and substituted by a new one. Such a distribution of spots over the Sun's hemispheres, however, should not be expected to have a durable character since the detailed records of sunspots as early as in the second half of July 1945 seem to hint to a waning of the difference in the spot frequency between the two hemispheres of the Sun.

Zagreb, January 1946.

UGAO ZA SVAKOGA

Trokut ABC i trokut A'B'C' (nacrtaj!) kojemu su vrhovi nožišta visina AA', BB', CC' trokuta ABC čine vrlo interesantan par trokutova. Lako se izvodė jedan iz drugoga, a s druge strane, nazovemo li trokut A'B'C', kratkoće radi, ortotrokut trokuta ABC, trokut i njegov ortotrokut pravo su čvorište zbivanja, pa svojim međusobnim položajem upravo nukaju čovjeka da traži veze među sijaset elemenata (razne tačke, segmenti, kružnice i t. d.), koji se pri tom pojavljuju; zato ortotrokut i kao dokazno sredstvo i kao pobuda za istraživanja zauzima istaknuto mjesto. O pitanjima koja se mogu nadovezati na razmatranje trokuta i ortotrokuta, mogla bi se napisati čitava knjiga. Mi se ovdje zadovoljavamo da istaknemo nekoliko činjenica.

1) Visine trokuta ujedno su simetrale kutova ortotrokuta, a stranice trokuta simetrale su vanjskih kutova ortotrokuta (odatle jednostavna konstrukcija vrhova trokuta iz ortotrokuta kao sjecišta okomica u vrhovima ortotrokuta na simetrale kutova ortotrokuta).

2) Okomice iz vrhova trokuta na stranice ortotrokuta sijeku se u središtu kružnice opisane oko trokuta.

3) Kružnica opisana oko ortotrokuta raspolavlja stranice trokuta kao i gornje odreske visina trokuta (t. j. segmente AV, BV, CV, gdje je V sjecište visina trokuta); zato se ta kružnica i zove kružnica devet tačaka (te su tačke: sredine stranica trokuta, sredine segmenata AV, BV, CV i vrhovi A', B', C'). Tačka V i težište trokuta središta su sličnosti (homotetije) kružnice devet tačaka i kružnice opisane zadanom trokutu (prema tome kružnica opisana trokutu ABC prolazi i simetričnim slikama ortocentra V s obzirom na stranice trokuta ABC);

4) Sjecišta istoimenih stranica trokuta i ortotrokuta leže na istom pravcu i to na radikalnoj osi kružnice opisane oko trokuta i kružnice opisane oko ortotrokuta.

5) Kružnica opisana oko ortotrokuta dodiruje sve četiri kružnice koje su bilo iznutra bilo izvana upisane trokutu;

6) Sam trokut ABC i trokuti uz vrhove naime trokuti AB'C', BC'A' i CA'B' jesu slični i kutevi uz vrhove tih trokuta nose odgovarajuće ime iz polaznog trokuta. na pr. kut AC'B' $= \gamma$. Nadalje je $a = a' \cos\alpha$ pa dakle trokut uz vrh A nastaje iz polaznog trokuta množeći mu stranice s $\cos\alpha$.

7) Opseg se ortotrokuta prema opsegu trokuta odnosi kao ρ prema r (notirajmo da je $\rho + r$ suma udaljenosti središta trokutu ABC opisane kružnice do njegovih stranica).

8) Kružnica, koja je trokutu upisana i kružnice, koje trokut diraju izvana dijele pojedinu stranicu trokuta na tri segmenta od kojih su ona dva prema vrhovima trokuta međusobno jednaka, dok je onaj treći segment stranice jednak razlici drugih dviju stranica trokuta.

9) Eulerov pravac (t. j. pravac kroz centar trokutu opisane kružnice, težište trokuta i ortocentar V trokuta) prolazi također: centrom ortotrokutu opisane kružnice, težištem trokuta kojemu su vrhovi u središtima gornjih odrezaka visina trokuta i središtem kružnice koja prolazi kroz sredine donjih odrezaka A'V, B'V, C'V visina.

10) Vanredno je interesantno svojstvo, da je ortotrokut šiljasta trokuta onaj trokut koji je upisan u zadani trokut i **ima najmanji mogući opseg**. Ovo se svojstvo lako može dokazati simetrijom (preklapanjem). Podimo naime od trokuta A B C i preklopimo ga preko stranice B C; dobiveni trokut označimo s $A_1B_1C_1$ (nacrtaj!). Označimo li taj prelaz ovako: A B C $\rightarrow$ (B C) $-$ $A_1B_1C_1$, odmah ćemo razumijeti šta znače ovi koraci:

$ABC \to (BC) \to A_1B_1C_1 \to (C_1A_1) \to A_2B_2C_2 \to (A_2B_2) \to A_3B_3C_3 \to (B_3C_3) \to A_4B_4C_4 \to (C_4A_4) \to A_5B_5C_5 \to (A_5B_5) \to A_6B_6C_6$ (slova u svakoj zagradi nastaju cikličkom izmjenom iz slova prethodne zagrade). Kod tih šest simetrija prelazi ortotrokut po redu u trokutove: $A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$ . . . $A'_6B'_6C'_6$, dok neki drugi proizvoljni trokut MNP upisan u zadani trokut ABC prelazi po redu u: $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ ... $M_6N_6P_6$. Zadnja faza $A_6B_6C_6$ nastaje iz početne faze ABC translacijom za dužinu $A'A'_6$ = dvostruki opseg ortotrokuta = MM_6. Kako slomljena crta $M_1N_2P_3M_4N_5P_6$ označuje dvostruki opseg trokuta MNP to je jasno, da je dvostruki opseg M_1P_6 ortotrokuta manji od te slomljene crte t. j. od dvostrukog opsega trokuta MNP. (isp. A. Streit, Sur les hauteurs d'un triangle, Enseignement Mathématique, 1926. pp. 22—45, 1927. pp. 97—138).

Ima li više prirodnih ili racionalnih brojeva?

Prirodne brojeve obično zamišljamo svrstane u nizu 1,2,3,...n, n + 1,... Racionalni su brojevi razlomci s cjelobrojnim brojnikom i cjelobrojnim nazivnikom (0 kao nazivnik isključena); recimo 0,3/4,5/2, — 14/15,5, — 8 primjeri su racionalnih brojeva. Ima li možda jednako mnogo prirodnih i racionalnih brojeva? T. j. mogu li se poput prsta na desnoj ruci i prsta na lijevoj ruci međusobno pridružiti prirodni brojevi i racionalni brojevi tako da svaki prirodni broj bude pridružen jednom jedinom racionalnom broju, a svaki racionalni broj jednom jedinom prirodnom broju kao što svakom prstu lijeve ruke odgovara samo jedan prst desne ruke, i istodobno obratno: svakom prstu desne ruke odgovara jedan jedini prst lijeve ruke? Ili ovako: Možemo li skup svih racionalnih brojeva svrstati u jedan niz? Možemo (Cantor 1874.) i idemo pokazati, kako se to radi. Dogovorimo se odmah, da ćemo poslije svakog pozitivnog razlomka odmah napisati i njegov suprotni broj. Stvar izgleda ovako:

$$\frac{0}{1}, -\frac{0}{1}; \frac{0}{2}, -\frac{0}{2}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{0}{3}, -\frac{0}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1};$$
$$\frac{0}{4}, -\frac{0}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}; \ldots\ldots$$

Uočimo, da grupa razlomaka, koji se nalaze između jedne »točke i zareza« i slijedeće »točke i zareza« imaju svojstvo, da im je suma brojnika i nazivnika ista i to po redu: 1 za prvu grupu, 2 za drugu grupu, 3 za treću grupu i t. d.; deseta bi grupa na pr. glasila:

$$\frac{0}{10}, -\frac{0}{10}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{8}, -\frac{2}{8}, \ldots, \frac{8}{2}, -\frac{8}{2}, \frac{9}{1}, -\frac{9}{1}.$$

Precrtamo li u napisanom nizu svaki broj, koji je prethodno već napisan dobit ćemo zaista niz svih racionalnih brojeva.

No racionalni su brojevi zapravo rješenje linearnih jednadžbi $ax + b = o$ s cijelim koeficijentima. Pređemo li na kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = o$ s cijelim koeficijentima, dobit ćemo osim racionalnih brojeva i drugih, koji nijesu racionalni na pr. broj $\sqrt{2}$ kao rješenje kvadr. jednadžbe $x^2 - 2 = 0$. Možemo li taj opsežniji skup ipak svrstati u jedan niz? Možemo; i to najzgodnije po grupama. U prvu grupu dolaze rješenja kvadratnih jednadžbi, kojima je visina 3 (visina algebarske jednadžbe = stepen jednadžbe + suma apsolutnih vrijednosti svih koeficijenata dotične jednadžbe). Visinu 3 imaju jedino kvadr. j. $\pm x^2 = 0$ s rješenjem $x = 0$. Visinu 4 imaju jedino ove kvadr. jednadžbe: $\pm x^2 \pm 1 = 0$ sa svim mogućim kombinacijama preznaka + i —; rješenja su brojevi: $0, \pm 1; \pm i$; i t. d.

Čak bi na sličan način mogli razvrstati u jedan niz i rješenja svih algebarskih jednadžbi s cijelim koeficijentima: najprije bi po visini razvrstali same jednadžbe, a onda bi ispisivali i njihova rješenja:

Visinu 2 imaju jedino jednadžbe $\pm x = o$;
3 " " " $\pm x \pm 1 = o, \pm 2x = o, \pm x^2 = o$;
4 " " " $\pm x \pm 2 = o, \pm 2x \pm 1 = o, \pm x^2 \pm 1 = o$;
. . . .

Pritom u svakoj jednadžbi treba uzeti sve mogućnosti s preznacima $\pm$, a ne da bi uzeli samo gornje ili samo donje kombinacije preznaka.

Kako svaka alg. jednadžba ima najviše onoliko različitih rješenja kolik joj je stepen, uvidamo da će zaista svaki algebarski broj (= rješenje alg. j. s cijelim koeficijentima) zauzeti bar jedno mjesto u jednom te istom nizu svih algebarskih brojeva.

(Isp. G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, 1932.).

ZADACI

Upozoravamo, da ćemo već u slijedećem broju Glasnika početi da objelodanjujemo i rješenja zadataka br. 1—22; imena rješitelja pojedinog zadatka objavit ćemo u onom redosljedu, kako su u Redakciju stizala ispravna rješenja odnosnog zadatka (naravno da ne ćemo spominjati, ako neko pošalje neispravno rješenje!).

Šaljite nam rješenja objavljenih zadataka, a šaljite nam i nove zadatke s pripadnim rješenjima za slijedeće brojeve Glasnika.

10. Kroz zadane četiri točke u ravnini položi kvadrat tako, da na svakoj stranici kvadrata ili njenom produženju leži po jedna točka. Koliko ima rješenja?

11. Zadane su dvije točke **A** i **B** i pravac **p**. Treba odrediti točku **C** na tom pravcu tako, da kut između spojnice točaka **A** i **C** i pravca **p** bude: a) dvaput, b) triput veći od kuta između spojnice točaka **B** i **C** i toga pravca. (Modificirani problem refleksije).

12. Treba konstruirati jednu ravninu, koja siječe zadani rotacioni čunj u elipsi zadanih osi.

13. Razmatrajmo brojeve oblika $m + n\sqrt{-2}$, gdje su **m** i **n** cijeli pozitivni ili negativni brojevi ili nula. Dokaži: ako su **a** i **b** relativno prosti i **a** liho, onda brojevi $a + b\sqrt{-2}$ i $a - b\sqrt{-2}$ nemaju zajedničkog faktora oblika $u + v\sqrt{-2}$.

(Spomenuto u Bachmann: Das Fermatproblem, str. 6.)

14. Dokaži relaciju (Bemanovu formulu):

$$x^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}f(x)\right] = \left(x^2\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

(Spomenuto u Goursat: Cours d'analyse I. 1927, str. 77.)

15. Dokaži ove relacije:

$$\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\frac{r!}{(r+m)!} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-s-1}{k-1}\frac{1}{m+s}$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\binom{n}{k+1}\frac{1}{m+r} = \sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-s-1}{k-1}\frac{s!}{(m+s)!}$$

Za $k = m = 1$ izlazi iz obih relacija kao specijalan slučaj poznata formula (Netto: Combinatorik, 1927, str. 274.):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} = \binom{s}{1} - \frac{1}{2}\binom{s}{2} + \frac{1}{3}\binom{s}{3} - \frac{1}{4}\binom{s}{4} + \ldots,$$

koja se prema Th. Skolemu (Netto 1. c. bilješka) najlakše dobije, ako se integral $\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx$ riješi razvijanjem integranda po potencijama varijable ili direktno ili po prethodnoj supstituciji $x = 1-y$.

16. Ako su **a**, **b** dva primbroja $>$ 7, onda je

$$(a^2-1)\,(b^2-1)\,(a^6-b^6) \text{ djeljivo s } 580608.$$

17. U zadani krug unutar ili na periferiji smjesti poligon s **n** vrhova najveće moguće površine.

18. U nutrinu ili periferiju zadana kruga smjesti **n** tačaka, tako da produkt svih međusobnih udaljenosti tih tačaka bude maksimalan.

19. a) Koliko elektrona sadrži množina elektriciteta, koja svake sekunde protječe kroz nit žarulje od 20 vata kod napetosti od 200 Volta? b) Ako bi na izbrajanju ove množine elektrona sudjelovalo 250.000 ljudi (približno broj stanovnika Zagreba) i ako bi svaki od njih u sekundi izbrojao po dva elektrona, koliko bi vremena trebalo, da oni radeći bez prekida dovrše cijeli posao brojenja? c) Kolika bi cijena došla na spomenutu množinu elektrona, ako bi jedan kilovatsat električne energije stajao 7.50 Din? (Podatak: jedan elektron sadrži $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ kulona).

20. Osjetljivim galvanometrom može se još izbrojiti struja od 10^{-12} ampera; a) u kojem vremenu može ta struja elektrolizom rastvoriti 1 mg vode; b) koliko se molekula vode kod toga rastvara u svakoj sekundi? Podaci: elektrokemijski ekvivalenti jesu: 0,00001046 za vodik, 0,0000829 za kisik, Avogadrov broj $N = 6{,}03 \cdot 10^{-23}$.

21. Postavimo, da je polumjer Zemlje 1, onda je polumjer Sunca 109, udaljenost središta obaju tjelesa 24.000, daljina Mjesec-Zemlja 60. Neka se izračuna a) dužina totalne sjene Zemlje, b) polumjer totalne sjene u daljini, u koju stigne Mjesec tečajem svojega ophoda, c) polumjer polusjene u istoj daljini.

22. Da li bi čovjek raketom mogao doprijeti do najbližih zvijezda stajačica? Pogon rakete osniva se na principu reakcije izbačene materije (plinova). Sila, koja goni raketu, jednaka je impulsu plinova izbačenih u jedinici vremena, t. j.

$$P = -C\frac{dM}{dt}$$

gdje je **M** masa rakete, a **dM** infinitezimalni prirast te mase u vremenu **dt**, dok je **C** brzina izbačenih plinova mjerena relativno spram rakete. Negativni predznak je potreban, jer je **dM** negativno, budući da se ukupna masa rakete smanjuje. Vidi se, da su uz istu silu smanjivanje mase i time omjer početne i konačne mase rakete na njenom putu tim manji, čim je brzina izbacivanja **C** veća.

Načelna zapreka za odašiljanje raketa u svemirski prostor bila je ta, da je najveća brzina **C**, koja se mogla postići kemijskim reakcijama, imala red veličine 5000 m/sek. Time je omjer početne i konačne mase rakete, koja bi trebala svladati gravitaciono polje zemlje kod dizanja i spuštanja, bio tako velik, da se tehnička provedba dala jedva zamisliti. Primjena atomske energije ovdje stvara mnogo šire mogućnosti, pa se može svakako očekivati ostvarenje rakete za putovanja unutar planetnog sustava.

Drugo je pitanje, može li se smatrati provedivim putovanje do najbližih zvijezda stajačica, pod pretpostavkom, da trajanje takvog putovanja ne prelazi trajanje čovjekova života.

Kod oslobađanja atomskih energija pretvara se jedan dio mase dotične materije u energiju prema Einsteinovoj relaciji $\mathbf{E} = \mathbf{mc^2}$. Pretpostavimo, da će budući razvoj fizike i tehnike omogućiti, da se to pretvaranje mase u energiju može provesti u potpunosti — što nije nipošto sigurno — i da će biti moguće tu energiju dobiti svu u obliku elektromagnetskog zračenja, recimo kao γ — zračenje. Time bismo dobili optimalni slučaj za tjeranje rakete reakcijom izbačenih γ — kvanta, jer je u tom slučaju brzina izbacivanja jednaka brzini svjetlosti, pa bi smanjivanje mase bilo najmanje. Impuls elektromagnetske energije iznosi

$\frac{E}{c}$, a to izraženo u masi, iz koje je pretvorbom ta energija nastala, glasilo bi **mc**, tako da za silu dobijemo izraz

$$P = -c \frac{dM}{dt}$$

gdje je c brzina svjetlosti.

Promotrimo sada problem rakete, kojom bismo htjeli putovati do α — **Centauri**, jedne od najbližih zvijezda stajačica, koja je od nas udaljena 4,31 godina svjetlosti. (Još je bliža **Proxima Centauri** sa 4,27 godina svjetlosti). Zanemarit ćemo gubitak mase, koji je potreban za svladavanje gravitacionog polja zemlje, jer je taj uz ove optimalne uvjete neznatan. Kao najveću akceleraciju rakete dopuštamo 10 m/sek^2, jer će odgovarajući pritisak na dno rakete putnici moći izdržati bilo kako dugo, budući da to odgovara približno pritisku sile teže na zemlji.

Postavljamo našim čitaocima ova pitanja:

I. Koje je najmanje trajanje puta do α — Centauri i natrag, ako ne trebamo štediti pogonskim sredstvima?

II. Koliko vremena taj put traje za same putnike, t. j. ako je od dva blizanca jedan putovao, a drugi ostao na zemlji, za koliko je poslije povratka onaj prvi mlađi od drugoga?

III. Kolika je najveća brzina, koja je postignuta na putovanju?

IV. Koliki bi bio omjer između početne i konačne mase rakete?

V. Koliko vremena će najmanje trajati put, ako omjer između početne i konačne mase rakete ne smije biti veći od 16 : 1?

VI. Koliko je to vremena za same putnike?

VII. Kolika je u tom slučaju najveća postignuta brzina?

Račune treba provesti na bazi specijalne teorije relativnosti.

(Za potrebna pomagala vidi M. L a u e: Die Relativitätstheorie I. 1919, str. 87—88).

BIBLIOGRAFIJA

DR. VLADIMIR VRANIĆ, O s n o v i f i n a n c i j s k e i a k t u a r s k e m a t e m a t i k e, drugo prerađeno i prošireno izdanje, 318 stranica. Zagreb 1946 i T a b l i c e f i n a n c i j s k e i a k t u a r s k e m a t e m a t i k e kao poseban prilog od 30 stranica. Naklada Nabavljačko-potrošačke i proizvađačke zadruge studenata zagrebačkog sveučilišta s o. j. Cijena Din 250 za knjigu i Din 40 za tablice. Cijena za studente Din 150.

Ova knjiga nastala je iz predavanja na Ekonomsko-komercijalnoj visokoj školi u Zagrebu na kojoj pisac djeluje već dugi niz godina kao nastavnik ovog predmeta.

Iz samog sadržaja proizlazi da se tu ne radi samo o jednom školskom udžbeniku, već o knjizi u kojoj je vođeno računa o stvarnoj praksi kod banaka i osiguravajućih zavoda, tako da ova knjiga ne daje samo teoretsku osnovu financijskih operacija, već pored toga pruža svakom interesentu vrijedna razjašnjenja o mnogim pojmovima, koji se inače često pogrješno tumače.

Vrlo sistematski je obrađena prije svega F i n a n c i j s k a m a t e m a t i k a t. j. matematika, koja obrađuje račun kamata, renta i anuiteta. Pisac kod toga sve svoje izvode osniva na pojmu promjenljive vrijednosti novca do koje se dolazi uslijed ukamaćivanja. Svi ti matematski izvodi odlikuju se vanrednom jednostavnošću i vjerujemo da je piscu uspjelo učiniti vrlo razumljivim izvjesne pojmove, koji inače čine početnicima dosta velikih poteškoća. S mnogo je truda kod toga obrađeno i poglavlje o otplati dugova, koje je za praksu sigurno od najveće važnosti.

Naročito pomno obrađena je A k t u a r s k a m a t e m a t i k a t. j. matematika osiguranja u kojoj se naročito osjeća da je napisana na os-

novu prakse koju je autor sam stekao radeći dugi niz godina kao matematičar (aktuar) jednog velikog osiguravajućeg zavoda. U tom pogledu ističemo napose poglavlja: Brutopremija, Matematička rezerva, Otkup i kapitalizacija, Reosiguranje i Osiguranje u valuti.

U svim poglavljima protumačeni su pojedini pojmovi na instruktivnim primjerima, koji su uzeti najvećim dijelom iz prakse i koji mnogo doprinose punom razumijevanju ove knjige.

Pored već spomenutih pojmova obrađeni su na vrlo interesantan način pojmovi prirodna premija, Zillmerovana rezerva, rizikokapital, prolongacija, zajam i t. d. uz obrazloženje razloga, koji opravdavaju izvjesna odstupanja u praksi. Vrlo su zanimivo obrađene i tabele o porastu odnosno padu prirodne premije, matematičke rezerve i riziko-kapitala, pa bismo s time u vezi preporučili da se kod slijedećeg izdanja ove vrijednosti ilustriraju grafičkim prikazima, što bi mnogo doprinijelo boljem razumijevanju. Jednako bi bio poželjan i grafički prikaz tabela mortaliteta a naročito tabela AF (Assurés français) uz istodobni grafički prikaz tabele RF (Rentiers français) kako bi se zorno isticala znatna razlika u mortalitetu između osiguranika za slučaj smrti i rentnika.

Sam prilog knjizi sadrži vrlo vrijedan izvadak iz poznatih »Spitzer-Försterovih« tabela za kamatni račun te komutativne brojeve za tablice mortaliteta HM i RF uz kamatnjak od 4%. Budući da bi ove tabele mogle poslužiti mnogim uredima bilo bi poželjno, da se ovaj prilog kod novog izdanja nešto proširi, da se štampa na jačem papiru i čvršće uveže. Tom prilikom trebalo bi računski kamatnjak mortalitetnih tablica sniziti na 3%, budući da se kamatnjak od 4% u današnjim prilikama vjerojatno više ne će moći polučiti.

Kod primjera u samom tekstu preporučili bismo da se uz primjer 93 na str. 227 doda primjer za osiguranje uz povrat uplaćenih premija za slučaj smrti osiguranika, jer se s tim u vezi u praksi najčešće javlja potreba simbola Rx.

Na kraju knjige dodano je poglavlje o socijalnom osiguranju kao vrlo kratak prikaz najvažnijih elemenata ove grane tehnike osiguranja. Ovaj je prikaz po našem mišljenju, a obzirom na veliku važnost koju ima danas ta grana osiguranja, odviše kratak (10 stranica) a da bi se mogao dati neki sud, pa stoga moramo prepustiti vremenu da dokaže da li je autor uspio sa svojim hvalevrijednim nastojanjem.

Konačno treba spomenuti da su knjizi dodani Zadaci za vježbu i alfabetsko kazalo.

Ovo djelo izašlo je prvi puta g. 1940 litografirano; međutim novo izdanje toliko je prošireno i prerađeno da se mora smatrati kao nova knjiga. Svakako se može reći da je pisac s tom knjigom u svakom pogledu uspio. Knjiga ispunjava osjetljivu prazninu, koja se odavna osjećala u našoj stručnoj literaturi, pa je poželjno, da se njome posluže ne samo studenti Ekonomsko-komercijalne visoke škole, već i matematičari koji se žele posvetiti aktuarskoj struci, te nastavnici na trgovačkim akademijama, to više što ova knjiga može da uzme ravnopravno mjesto među knjigama te struke na stranom jeziku na koje smo do sada bili gotovo isključivo upućeni.

Prof. Vladimir Glumac

DR. ING. BORIS APSEN, Logaritmičko računalo, Zagreb 1946. Novo izdanje prerađeno i nadopunjeno. Naklada Narodne knjižare. Cijena Din 85.—

Prvo izdanje ove knjige izašlo je godine 1934. i naišlo je već tada na odličan prijem. U Tehničkom listu od 31. siječnja 1935. napisao sam tada kratki prikaz te knjige, pa se stoga i sada smatram pozvanim da i o drugom izdanju knjige kažem nekoliko riječi.

Logaritmičko računalo spada u područje t. zv. Praktične matematike, t. j. matematike koja dolazi u praksi. Praksi je naime potrebna ne samo teoretska matematika, već u velikoj mjeri i ono što bismo mogli zvati tehnikom računanja. Za praktičare, a tu mislim u prvom redu inženjere i tehničare sviju struka, često je od velike važnosti da račune, koji su im potrebni, izvedu što brže i što jednostavnije, a ipak onoliko točno, koliko je to za pojedini zadatak od potrebe. Praktičari se, u tu svrhu, služe najraznovrsnijim metodama računanja: numeričkim, grafičkim i s pomoću računskih strojeva. Jedno od najpoznatijih računskih pomagala je logaritmičko računalo i zato treba pozdraviti zamisao pisca da u preglednom obliku protumači to računalo i način računanja s njime. Logaritmičko računalo vrijedi naime samo onda, ako ga u tančine poznamo i ako znamo ne samo kako se s njim računa, već i što se sve s njim može računati. U tom pogledu Dr. Apsen sjajno je riješio svoju zadaću razjasnivši na 127 stranica zbilja sve što danas treba znati o računalu. Piščevo je djelo jedino te vrste kod nas i doći će dobro, kao što sam gore naveo, inženjerima i tehničarima, ali ono je namijenjeno i studentima te i svima drugima, koji su upućeni da računaju mnogo s računalom, a preporučili bismo tu knjigu i onima, malobrojnima doduše, koji još i danas uzimaju računalo s nepovjerenjem u ruku ne znajući koliko im može računalo olakšati posao.

Premalen je ovdje prostor da bismo mogli i smjeli u detalje analizirati čitavu knjigu, već bismo samo istaknuli neka važnija poglavlja. Tu bismo prije svega istaknuli poglavlje o točnosti logaritmičkog računala. Stvarno, logaritmičko je računalo logaritmička tablica na 3 decimale. To se ne smije previdjeti kad se računa s računalom, međutim u praksi ta točnost često posve dostaje. Pisac je vrlo lijepo prikazao kako se pomoću poznatih diferencijalnih formula za pojedine zadatke određuje točnost rješenja. To je poglavlje vrlo instruktivno i nitko ne bi smio da pređe preko njega.

Pisac zatim na vrlo pregledan način prikazuje kako se pomoću logaritmičkog računala izvode glavne računske operacije: množenje, dijeljenje, kvadriranje, kubiranje, vađenje drugog i trećeg korijena i t. d.

S mnogo je pažnje obrađeno poglavlje o goniometrijskim funkcijama i tu se osjeća da je knjigu napisao geodetski inženjer koji zna od kolike je važnosti upotreba logaritmičkog računala u goniometrijskim i trigonometrijskim računima. Pisac opisuje kod toga specijalno odlike računala sustava »Darmstadt« na čijem je poboljšanju i sam aktivno sudjelovao i dao pobudu kako da se to usavršivanje provede.

Ovo drugo izdanje knjige mnogo je opširnije od prvog izdanja pa daje mnoge primjene i za elektrotehniku, višu analizu i t. d. i stvarno pokazuje kolika je raznolika i mnogostrana primjena računala, specijalno računala sustava »Darmstadt«. Tako se pokazuje kako se rješavaju eksponencijalne jednadžbe, preračunavaju kilovati u konjske sile, određuje stupanj djelovanja dinamo strojeva i elektromotora, određuje pad napona, omski otpor i težina bakrenih vodova i t. d.

Vrlo je instruktivno poglavlje o rješavanju pravokutnih i kosokutnih trokuta. Rješavanje kosokutnih trokuta nije bilo sadržano u I. izdanju, pa sam u svom tadanjem prikazu upozorio na taj nedostatak. Drago mi je da vidim da je pisac rado prihvatio moju sugestiju i proširio svoju knjigu u tom smislu.

U mom prikazu, koji je izašao prije 11 godina u Tehničkom listu, istaknuo sam da knjiga ne samo da ne zaostaje za sličnim djelima inostranstva, već ih u mnogom pogledu i premašuje. Za novo izdanje koje je još savršenije od prvog, može se ta konstatacija pogotovo naglasiti. Pisac nas je tim svojim radom u svakom pogledu zadužio.

Dr. Vladimir Vranić